24759

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

APARE LA 15 A FIECĂREI LUNI

VOLUMUL V

ANUL 1925—1926.

BIB[illegible]STRA

TIMIȘOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"
1926.

1 1904

'05

.... 2014

I 24759

ANUL V. 15 MARTIE 1925 NO. 1.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 6 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 60 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. NICOLAE CIORANESCU. DISCUTIA ECUATIILOR DE GRADUL III ȘI IV.
2. NOTE MATEMATICE. 1.
4. BIBLIOGRAFIE.
6 PROBLEME REZOLVATE: 377, 378, 379, 383, 384, 392, 395, 396, 399, 400.
7. PROBLEME PROPUSE.
8. INFORMATIUNI

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU
TIMISOARA
2453

Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat 60 lei
Anul III, broșat, 60 lei.

ANUL V. — NO. 1. TIMISOARA, 15 MARTIE 1925

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 6 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 60 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

DISCUȚIA ECUAȚIILOR DE GRADUL III și IV

NICOLAE CIORANESCU

Voi expune în cele ce urmează o metodă simplă și elementară, care ne conduce la determinarea discriminantului unei ecuații de gradul III sau IV și care ne permite a determina prin simple calcule numerice natura rădăcinelor acestor ecuații.

1°) Fie ecuația completă de gradul III:

$$(1) \qquad x^3 + a x^2 + b x + c = 0.$$

Ea se poate pune totdeauna sub forma:

$$(2) \quad x^3 + a x^2 + b x + c = (x - r)(x^2 + p x + q),$$

căci are totdeauna o rădăcină reală.

Natura celorlalte 2 rădăcini depinde de semnul lui:

$$(3) \qquad \delta = p^2 - 4q.$$

Chestiunea se reduce la a determina pe δ în funcție de a, b, c. Din (2) avem relațiile:

$$4) \quad p - r = a;\ q - pr = b;\ -qr = c \text{ și } p^2 - 4q = \delta.$$

Pentru a afla pe δ trebue să aflăm pe p, q, r din primele 3 și a îi duce în ultima, sau cu alte cuvinte de a elimina pe p, q, r între aceste 4 relații. Eliminarea o facem astfel: Din primele 2 relații scoatem pe p și q și îi ducem în ultimele 2 și avem:

$$(5) \quad (a+r)^3 - 4\left[r(a+r) + b\right] = \delta;\ r\left[\delta - (a+r)^2\right] = 4c$$

sau: $(5')$ $\quad 3r^2 + 2ar + 4b - a^2 + \delta = 0;$

$$r^3 + 2ar^2 + (a^2 - \delta) r + 4c = 0.$$

Sau înmulțind prima cu r și a doua cu 3 și scăzând rămâne de eliminat r între relațiile:

$$(6) \qquad 3r^2 + 2ar + 4b - a^2 + \delta = 0;$$

$$ar^2 + (a^2 - b - \delta) r + 3c = 0,$$

care eliminare făcută după formula cunoscută ne dă:

$$(7) \qquad (4ab + a\delta - a^3 - 9c)^2 -$$

$$(3b - a^2 + 3\delta)\left[(a^2 - \delta - b)(4b + \delta - a^2) - 6ac\right] = 0$$

După cum se vede δ e dat de ecuația (7) care este de grad. III, după cum și era de prevăzut căci descompunerea (2) este posibilă în 3 moduri deosebite, însă numai unul e real când ecuația (1) are rădăcini imaginare. S'ar părea că problema nu este avansată deloc, căci pentru a afla pe δ am ajuns tot la o ecuație de gradul III. Chestiunea nu este așa căci nouă nu ne trebue chiar δ, *ci semnul lui* δ. Ori acesta putem să-l aflăm imediat. Dacă însemnăm cu $f(\delta)$ membrul I al ecuații (7) semnul rădăcinii δ_1 reală este dat de $f(0)$. Dacă $f(0) > 0$ fiindcă $f(-\infty) < 0$ rezultă că $\delta < 0$, deci (1) are rădăcini imaginare. Dacă $f(0) < 0$ ecuația (1) are toate rădăcinele reale. Fie $\Delta_1 = f(0)$. Deci discuția se poate rezuma astfel:

$$(8) \qquad \begin{cases} \Delta_1 > 0 & 2 \text{ rădăcini imaginare} \\ \Delta_1 < 0 & \text{toate rădăcinele reale} \\ \Delta_1 = 0 & \text{deci } \delta = 0 \text{ rădăcină dublă.} \end{cases}$$

$f(0)$ se calculează ușor din (7); el este:

$$(9) \qquad (4ab - a^3 - 9c)^2 -$$

$$(a^2 - 3b)\left[(a^2 - b)(a^2 - 4b) + 6ac\right] = \Delta_1,$$

și a cărui expresie nu este greu de reținut. Dacă se desvoltă Δ_1 se găsește că valoarea lui este:

$$(10) \qquad \Delta_1 = 3\left[-a^2 b^2 + 27c^2 - 18abc\right.$$

$$\left. + 4a^3 c + 4b^3\right] = 3\Delta,$$

Δ fiind tocmai discriminantul ecuației (1).

(Vezi și *E. Caraman* R. M. T., anul II, No. 9.

Forma (9) a discriminantului pe care o cred nouă și ca expresie și ca mod de deducție este mai remarcabilă și mai ușor de ținut minte.

Ea permite imediat câteva observațiuni interesante:

a) Dacă în ecuația (1) am între coeficienți relația: $a^2 = 3b$

atunci ea are neapărat rădăcini imaginare.

In adevăr atunci Δ_1 este un patrat perfect și deci > 0.

b) Dacă $a^2 < b$ iar $ac > 0$ atunci ecuația (1) are rădăcini imaginare. Și această afirmație este evidentă controlând pentru acest caz expresia lui Δ_1 care se găsește pozitiv.

2°) Metoda de mai sus se poate aplica în acelaș mod la discuția ecuații de gradul IV. Fie ecuația:

$$x^4 + a x^2 + b x + c = 0 \tag{11}$$

pe care s'o descompunem după Descartes în:

$$x^4 + a x^2 + b x + c = (x^2 - u x + s)(x^2 + u x + t) \tag{12}$$

Natura rădăcinelor ecuației (12) depinde de semnul expresii:

$$\Delta = (u^2 - 4s)(u^2 - 4t) = u^4 - 4(s+t)u^2 + 16st \tag{13}$$

Dacă $\Delta < 0$ (11) are 2 rădăcini reale și 2 imaginare
„ $\Delta > 0$ (11) are sau toate reale sau toate imaginare
„ $\Delta = 0$ (11) are rădăcini multiple.

In cazul al doilea decidem după semnul lui a dacă sunt toate reale sau imaginare, aplicând teorema lacunelor.

Să căutăm a exprima pe Δ în funcție de coeficienții a, b, c. Din (12) avem relațiile:

$$s + t - u^2 = a; \quad (s - t)u = b; \quad st = c \quad \text{și}$$

$$u^4 - 4(s+t)u^2 + 16st = \Delta. \tag{14}$$

Din primele (3) relații formăm rezolvanta ecuații (11) care este.

$$u^6 + 2a u^4 + (a^2 - 4c)u^2 - b^2 = 0. \tag{15}$$

iar Δ este:

$$\Delta = -3u^4 - 4a^2 u^2 + 16c, \tag{16}$$

căci $s + t = a + u^2$ iar $st = c$. Intre (15) și (16) eliminăm pe u^2. Punem $u^2 = z$ și combinând pe (15) cu (16) astfel ca să rămână tot de gradul II, rămâne de eliminat (z) între:

$$3z^2 + 2a^2 z - 16c + \Delta = 0; \tag{17}$$

$$2a(3-a)z^2 + (3a^2 + 4c - \Delta)z - 3b^2 = 0,$$

care ne dă relația:

$$\left[2a(3-a)(\Delta - 16c) + 9b^2\right]^2 - \left[4a^3(3-a) - 3(3a^2 + 4c - \Delta)\right]\left[3a^2 + 4c - \Delta)(\Delta - 16c) + 6a^2 b^2\right] = 0$$

După cum se vede Δ e dat tot de o ecuație de gradul III. Semnul lui Δ e dat de $f(0)$.

$$f(0) = D = \left[9b^2 + 32ac(a-3)\right]^2 + \left[4a^3(a-3) + 9a^2 + 12c\right]\left[6a^2 b^2 - 16c(3a^2 + 4c)\right] \tag{18}$$

Dacă $D > 0$, atunci $\Delta < 0$ și ecuația are 2 rădăcini reale
„ $D < 0$ „ $\Delta > 0$ „ are 4 rădăcini reale
dacă $a < 0$
și 4 imaginare dacă $a > 0$
„ $D = 0$ „ $\Delta = 0$ și ecuația are rădăcini multiple

Exemplu. Fie de calculat D pentru ecuația:

$$x^4 + px + q = 0.$$

Avem:

$$D = 81p^4 - 12q \cdot 64q^2 = 3(27p^4 - 2^8 q^3);$$

Deci dacă $D > 0$ adică $\left(\frac{p}{4}\right)^4 > \left(\frac{q}{3}\right)^3$ 2 reale și 2 imaginare

$D < 0$ „ $\left(\frac{p}{4}\right)^4 < \left(\frac{q}{3}\right)^3$ 4 imaginare

$\left(\frac{p}{4}\right)^4 = \left(\frac{q}{3}\right)^3$ multiple.

(A se vedea și'n „Culegere de probleme“ *Ioachimescu*, XXII, No. 19).

NOTE MATEMATICE

1. *Teoremă relativă la determinantul Vandermonde.*

Dacă într'un determinant Vandermonde :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0^m & x_0^{m-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^m & x_1^{m-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m^m & x_m^{m-1} & \dots & x_m & 1 \end{vmatrix},$$

înlocuim elementele unei coloane prin niște numere arbitrare $u_0, u_1, \dots u_m$, *apoi înmulțim determinantul obținut cu suma elementelor scoase și facem această operație pentru fiecare coloană, atunci suma produselor astfel obținute este egală cu determinantul* Δ, *înmulțit cu suma numerilor arbitrare* $u_0, u_1, \dots u_m$, *adică :*

$$\sum_{i=1}^{m+1} \Delta_i s_{m-i+1} = (u_0 + u_1 + \dots + u_m)\,\Delta,$$

unde Δ_i *este determinantul obținut înlocuind în* Δ, *elementele de rangul i, prin* $u_0, u_1, \dots u_m$. *și :* $s_i = x_0^i + x_1^i + \dots + x_m^i$.

Vom determina în primul rând un polinom de gradul m,

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m,$$

care să ia valorile arbitrare $u_0, u_1, \dots u_m$, respectiv pentru $x = x_0, x_1, \dots x_m$.

Coeficienții $A_0, A_1, \dots A_m$ trebue deci să satisfacă simultan condițiile :

$$(1)\quad \begin{cases} A_0 x_0^m + A_1 x_0^{m-1} + \dots + A_{m-1} x_0 + A_m = u_0 \\ A_0 x_1^m + A_1 x_1^{m-1} + \dots + A_{m-1} x_1 + A_m = u_1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_0 x_m^m + A_1 x_m^{m-1} + \dots + A_{m-1} x_m + A_m = u_m \end{cases}$$

Avem astfel un sistem de $m+1$ ecuații cu $m+1$ necunoscute $A_0, A_1, \dots A_m$.

Deducem ușor :

$$A_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots m+1,$$

unde Δ este determinantul *Vandermonde* din enunț iar Δ_i se obține din Δ, înlocuind elementele coloanei de rangul i respectiv prin numerile arbitrare $u_0, u_1, \dots u_m$.

Acum înlocuim în sistemul (1) valorile găsite pentru $A_0, A_1, \dots A_m$ și scăpând de numitor găsim :

$$\Delta_1 x_0^m + \Delta_2 x_0^{m-1} + \dots + \Delta_m x_0 + \Delta_{m+1} = u_0 \Delta$$
$$\Delta_1 x_1^m + \Delta_2 x_1^{m-1} + \dots + \Delta_m x_1 + \Delta_{m+1} = u_1 \Delta$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\Delta_1 x_m^m + \Delta_2 x_m^{m-1} + \dots + \Delta_m x_m + \Delta_{m+1} = u_m \Delta$$

Adunând aceste relații și folosind notația prescurtată :

$$s_i = x_0^i + x_1^i + \dots + x_m^i, \quad i = 0, 1, \dots m,$$

găsim :

$$\Delta_1 s_m + \Delta_2 s_{m-1} + \dots + \Delta_m s_1 + \Delta_{m+1} s_0 = (u_0 + u_1 \dots u_m)\,\Delta,$$

sau :

$$\sum_{i=1}^{m+1} \Delta_i s_{m-i+1} = (u_0 + u_1 + \dots + u_m)\,\Delta,$$

și teorema este astfel stabilită.

Aplicație. In cazul particular când Δ este un determinant *Vandermonde* de ordinul al 2-lea, anume :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix},$$

iar α, β sunt cantități arbitrare, conform teoremei de mai sus, avem următoarea identitate :

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & 1 \end{vmatrix} (a+b) + 2 \begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix} = (\alpha + \beta) \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix}$$

care se poate verifica și direct.

Vom demonstra în numărul viitor o teoremă mai generală.

V. ALACI

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXX, No. 6, Februarie 1925. Chestiunea calendarului, de *C. D. Orăşeanu*. Patrate decapitate. de *Emil Ştefănescu*.

2. *Foaia Matematică*, anul II, Februarie 1925. Rezolvarea ecuaţiei de gradul al IV-lea, de *C. Berdan*.

3. *Jurnal Matematic*, publicat de *Tiberiu Popovici*. Avem plăcerea a anunţa reapariţia, Jurnalului Matematic, (litografiat), înfiinţat la 1 Ianuarie 1924 şi care îşi întrerupse apariţia pentru un scurt timp. Felicităm călduros pe d-l *Tiberiu Popovici*, un pasionat, harnic şi priceput lucrător în ogorul matematic, dorindu-i succesul cuvenit. Vol. II, No. 1, 1925, coprinde: Către cititori, de *T. Popovici*. Asupra suprafeţelor şi dimensionale, de *T. Popovici*. Asupra sumei puterilor asemenea a termenilor unei progresii aritmetice, de *T. Popovici*. Asupra unor determinanţi, de *T. Popovici*. Note, Bibliografie, Probleme rezolvate 8, Probleme propuse. Abonamentul costă 80 lei şi se plăteşte la d-l *P. Mirescu, str. Aquila 47, Bucureşti*.

PROBLEME REZOLVATE

377. — *Să se demonstreze că în orice triunghiu există relaţia:*

$$\sum (a^2 - b\,c\,\cos A) = 2\,R\,(2\,R + r')$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

DORNEANU S. V.

Soluţie dată de d-nii: *Apostol Carol* (lic. Internat, Iaşi), *Berdan C., Budişteanu Al.* (lic. M-rea Dealu), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Ghinicescu I. Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Florea Al.* (lic. Internat, Iaşi), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu) şi *Ştefănescu Emil.*

Folosim relaţiunile cunoscute într'un triunghiu:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,a\,c\,\cos B$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2\,a\,b\,\cos C,$$

pe care le adunăm şi avem:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2\,(a^2 + b^2 + c^2 - b\,c\,\cos A - a\,c\,\cos B - a\,b\,\cos C)$$

(1) $\therefore\ \frac{1}{2}\sum a^2 = \sum (a^2 - b\,c\,\cos A).$

Cum ştim că:

$a = 2\,R\,\sin A,\ b = 2\,R\,\sin B,\ c = 2\,R\,\sin C,$

relaţia (1) devine:

(2) $\sum (a^2 - b\,c\cos A) = 2R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$

Insă:

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C.$

(C. de P. Trigonometrice § XVII, p. 394), şi:

$\cos A\cos B\cos C = \frac{r'}{2R}$, (C. de P. Trigonometrie, § XIX, p. 402), aşa că:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \frac{2R + r'}{R}.$$

Relaţia (2) devine astfel:

$$\sum (a^2 - b\,c\,\cos A) = 2\,R\,(2\,R + r'),$$

care este relaţia cerută.

378. — *Să se găsească patratele de trei cifre, astfel ca câtul diviziunii prin 3 al produsului numărului format cu primele două cifre prin diferenţa dintre numărul de trei cifre şi răsturnatul său, să fie patrat perfect.*

I. GH. SILION

Fie a, b, c patratul cerut. Conform enunţului trebue se avem:

$$\frac{(10\,a + b)(100\,a + 10\,b + c - 100\,c - 10\,b - a)}{3} = N^2$$

N număr întreg, sau:

(1) $3 \cdot 11\,(10\,a + b)\,(a - c) = N^2.$

Dar $a, b, c \leq 9$, deci nu-i posibil ca $a - c = m \cdot 11$, trebue ca $10\,a + b = m \cdot 11$; adică a şi b sunt identice. Mai trebue ca $10\,a + b$ sau $a - c$ să fie multiple de 3.

Numerile ce corespund acestor sunt:

332, 441, 664, 882, 996,

dintre care numai numărul 441 corespunde problemei:

Soluții bune date de d-nii: *Berdan C.* (București), *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea N.* (lic. Cantemir, București), *Braeșter Otto* (lic. Național, Iași), *Căldăraru Leon* (București), *Cojoc N. Gh.* (P.-Neamț), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dimitriu Paul* (lic. M-rea Dealu), *Florea C. Alex.* (lic. Internat, Iași), *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov), *Iliescu Dan* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu M. Lazăr* (lic. M-rea, Dealu), *Lepădatu I. V.* (lic. Internat, Iași), *Marcovici H.* (lic. Botoșani), *Marcovici M. Mauriciu* (lic. Botoșani), *Neacșu Gh. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Neumann Maria* (stud. Lugoj), *Podeanu Aurel* (lic. Pitești), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Popovici Th. Ioan* (Șc. Polit. București), *Restesz B., Roșu Alex.* (lic. M-rea Dealu), *Șerban Tib.* (Zărnești), *Spârchez Zeno* (Șc. Polit. Timișoara), *Stănescu I. Aurel* (lic. M-rea Dealu), *Stănescu I. Theodoru* (lic. M-rea Dealu), *Ștefănescu Emil, Stoica Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Țăraș Vasile* (lic. Brașov), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu N.* (lic. Sp. Haret) și *Vlădeanu Tib.* (lic. Sp. Haret, București).

Observare. D-nii: *Cojoc N. Gh., Critz D. M., Diaconu B. Marin Neumann Maria, Roșu Alex., Spârchez Zeno* și *Stănescu Aurel*, au arătat că singurul patrat perfect de patru cifre care satisface enunțul este numărul $4356 = 66^2$.

379. — *Se cer patratele perfecte de n cifre, astfel ca ultimele $n-1$ cifre să fie identice.*

MIU M. IOAN

Vom presupune $n > 2$: Știm că ultimele două cifre ale unui patrat perfect, sunt: 00, 25, 01, 09, 21, 29, 41, 49, 61, 69, 81, 89, 04, 16, 24, 36, 44, 56, 64, 76, 84 și 96, (C. de P. Aritmetice XXXIX, pag. 50).

Observăm aceste grupe și ținând seama de enunț rezultă că numai 0 și 4 ar putea fi cifrele identice, deci patratele cerute de n cifre sunt de forma:

(1) $a00\ldots0$, (2) $b44\ldots4$

cu $n-1$ zeruri sau patru.

Forma (1) nu ne poate da patrate perfecte decât dacă n este impar și $a = 1, 4, 9$, în care caz avem numerile:

$$100\ldots0,\ 400\ldots0,\ 900\ldots0$$

cu un număr par de zeruri, soluți ale problemei.

Pentru forma (2), putem lua $b = 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9$.

Dacă $b = 1$, avem:

$$144\ldots4 = 4 \times 361\ldots11.$$

Pentruca aceste numere să fie patrate perfecte, trebue ca $361\ldots11$ să fie patrate perfecte, dar cum sunt terminate cu 11 nu's patrate perfecte de cât în cazul când după 36 nu avem nici un 1, sau un singur 1, în care caz avem soluțiile.

$$144 = 12^2,\ 14444 = 38^2.$$

Dacă $b = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, avem:

$$\left.\begin{aligned} 244\ldots4 &= 4 \times 611\ldots1 \\ 344\ldots4 &= 4 \times 861\ldots1 \\ 444\ldots4 &= 4 \times 11\ldots1 \\ 544\ldots4 &= 4 \times 136\ldots1 \\ 644\ldots4 &= 4 \times 161\ldots1 \\ 744\ldots4 &= 4 \times 186\ldots1 \\ 844\ldots4 &= 4 \times 211\ldots1 \\ 944\ldots4 &= 2 \times 236\ldots1 \end{aligned}\right\} \quad n > 2$$

Ultimii factori ai acestor numere nu's patrate perfecte fiind terminate cu grupa 11, și nici dacă au un singur 1, sau nici unul. Așa dar soluțiile problemei sunt numai numerile de forma:

$$100\ldots0,\ 400\ldots0,\ 900\ldots0.$$

cu un număr par de zeruri și încă numerile 144 și 1444.

Dacă am presupune $n = 2$, toate patratele perfecte de două cifre sunt încă soluții.

Soluție dată de d-nii: *Berdan C.* [București], *Blasko Beatrix* [Lugoj], *Botea G. Nicolae* [lic. Cantemir, București], *Braeșter Otto* [lic. Național, Iași], *Florea C. Alex.* [lic. Internat, Iași], *Gataiantu V. Barbu* [lic. Caracal] *Ionescu Th. Bujor C-tin* [lic. Cantemir, București], *Lepădatu I. Victor, Manoil Adolf* [Roman], *Neumann Maria* stud., Lugoj], *Popescu N. Corneliu* [lic. Giurgiu], *Popovici C. C-tin* [lic. Internat, Iași], *Popovici Th. Ion* [București], *Burdilă C-tin* [lic, Brașov], *Șerban Tib.* [Zărnești], *Spârchez Zeno* [Șc. Polit. Timișoara], *Ștefănescu Emil* [București], *Stoian Aurel* [lic. Cantemir, București], *Stroescu Gheorghe* [lic. Tg.-Mureș].

Soluții parțiale date de d-nii: *Cojoc N. Gh.* [Piatra-Neamț], *Diaconu B. Marin* [lic. M-rea Dealu], *Dimitrescu A. Mișu* [lic. Roman], *Dugan C. Victor* [lic. M-rea Dealu], *Ebner Arthur* [lic. Galați], *Gârleșteanu Mihail* [Șc. Polit.. Timișoara], și *Stănescu D. Teodoru* [lic. M-rea Dealu]

383. — *Să se rezolve ecuația:*

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x-\sqrt{x}}}} + \frac{\sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

V. COSNITA.

Aducem ecuaţia la forma întreagă şi avem:

$$\sqrt{5}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}+x-\sqrt{x+\sqrt{x}})$$
$$=4\sqrt{2}\,(\sqrt{x^2-x-\sqrt{x}})$$

$$\overset{*}{**}\quad x\sqrt{5}=2\sqrt{2}\,.\sqrt{x^2-x-\sqrt{x}}$$

Ridicând la patrat obţinem:

$$5x^2=8(x^2-x-\sqrt{x})$$

$$\overset{*}{**}\quad 3x^2-8x=8\sqrt{x}$$

Ridicând din nou la patrat, găsim:

$$x^2(9x^2-48x+64)=64x$$

$$x(9x^3-48x^2+64x-64)=0.$$

Cum polinomul din paranteză se anulează pentru $x=4$, el admite factorul $x-4$ şi avem:

$$x(x-4)(9x^2-12x+16)=0.$$

Rădăcinele acestei ecuaţii uşor vedem că sunt:

$$x_1=0,\ x_2=4,\ x_{3,4}=\frac{2}{3}(1+i\sqrt{3}),\ (i=\sqrt{-1})$$

Aceste rădăcini se constată că verifică şi ecuaţia dată:

Soluţii date de d-nii: *Antistescu Nicolai* (lie. Internat, Iaşi), *Antofie C. Nicolae* (lic. Târgovişte), *Apostolescu V Că-lin* (lic. Târgovişte), *Beldie N. D-tru* (lic. R. Sărat) *Băncilă Mircea* (Braşov), *Berdan C.* (Bucureşti), *Beschea Nicolae* (lic. Braşov), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Bruda Nicolae* (lic. Făgăraş), *Căldăraru Leon* (Bucureşti), *Chinie Mihail* (lic. Piteşti), *Cocorandu Dan* (lic. Braşov), *Cogan Alter* (lic. Chişinău), *Constantinescu D. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Constantinescu Gh. Ioan* (lic. Piatra-Neamţ), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Costea Octavian* (lic. Braşov), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *David Segal* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Damşescu Alexandru* (Şc. Polit. Timişoara), *Dângă G. Vlad* (lic. Orheiu), *Diaconescu T.* (lic. Caracal), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dumitrescu A. Mişu* (lic. Roman), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Drăgan G.* (lic. Braşov), *Drăghici Aurelian* (Tg.-Jiu), *Eleomir, Fainzilber N.* (lic. Botoşani), *Fezi E. Gh.* (lic. Orheiu), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Frătici I.* (Şc. Polit. Timişoara), *Frumuşelu Gh.* (lic. Braşov), *Gârleşteanu Mihail* (Şc. Pol. Timişoara), *I. N Georgescu-Val* (Timişoara), *Ghelber Mauriciu* (Sem. Ped. Bucureşti), *Gherbanowscky Nicolae* (lic. Orheiu), *Grabowski Eugen* (lic. Orhei), *Gradiny I. Gheorghe* (Şc. Polit. Timişoara), *Grigore T. Vir.* (lic. Tg.-Jiu), *Iacobi Şt. Eug.* (lic. Botoşani), *Ianculescu Octavian, Ioachim Grigore* (lic. Milit. Iaşi), *Ionescu Angelo* (lic. Cluj), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Gh. C-tin* (lic. Tg.-Mureş), *Iscovici Paul* (lic. Piteşti), *Katz Lazăr* (Botoşani), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Marcovici H.* (Botoşani), *Marcovici M. Mauriciu* (lic. Botoşani), *Marini Paul* (student, Cluj), *Mihăilescu A. C.* (lic. Internat, Iaşi), *Mihăilescu Şt. Niculae* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Milner I., Miu M. Ion* (lic. Caracal), *Musta Ştefan* (Cluj), *Neacşu Vasile* (lic. Braşov), *Neumann Maria* (stud., Lugoj), *Nicolau G. C.* (lic. R.-Sărat), *Petrescu N. Popa* (lic. Braşov), *Petrescu Şt. Alex.* (lic. Militar, Craiova), *Podeanu P. Aurel* (lic. Piteşti), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Pop Iulian* (Cluj), *Popa Ilie* (lic. Internat, Iaşi), *Popa Oct.* (lic. Făgăraş), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popescu C Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu N. Niculai* (stud. Bucureşti), *Popovici Th. Ioan, Purdilă C-tin* (lic. Braşov), *Puşcă Toma* (lic. Internat, Iaşi), *Rădulescu Nicolae* (lic. Caracal), *Râmniceanu Radu* (lic. Tg.-Jiu), *Râpeanu Virgil* (lic Internat, Iaşi), *Rătan I.* (lic. Braşov), *Roşu Al. Alexandru, Rucăreanu Nicolae* (lic. (Braşov), *Russu C. Adrian* (lic. Internat, Iaşi), *Segârceanu C. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Şerban I. Tib.* (lic. Zărneşti), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Spârchez Zeno* (Şc. Polit. Timişoara), *Staicu Irimie* (Braşov), *Stamatiu I. Mihail* (student), *Stănciulescu A. George* (Piteşti), *Stănescu D. Teodoru* (lic. M-rea Dealu), *Ştefănescu Emil, Stoica Aurcliu, Stroescu I. Gheorghe* (lic. Tg.-Mureş), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul Bucureşti), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Tunaru R. Traian* (Craiova), *Ulea C. Titus* (lic. Internat, Iaşi), *Vasiliu Gh. Neculai* (lic. Focşani), *Văcăreanu A. Em.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Velea Gr. Mihail* (lic. mil. Craiova), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov) şi *Vulpanovici Boris* (lic. Chişinău).

384. — *Se dau ecuaţiile:*

$$x^2+px+q=0,\quad x^2+p'x+q'=0,$$

cu rădăcinele respectiv $x_1,\ x_2;\ x'_1,\ x'_2$.

Să se formeze ecuaţia:

$$X^4+aX^3+bX^2+cX+d=0,$$

ale cărei rădăcini sunt:

$$X_1=x_1x'_1,\ X_2=x_1x'_2,\ X_3=x_2x'_1,\ X_4=x_2x'_2.$$

EMIL ŞTEFANESCU

Folosim relaţiile dintre coeficienţii şi rădăcinele ecuaţiei de gradul al 4-lea cerute şi înlocuim pe X_1, X_2, X_3, X_4 cu valorile lor, avem succesiv:

$$-a=X_1+X_2+X_3+X_4=x_1x'_1+x_1x'_2+$$
$$+x_2x'_1+x_2x'_2=x_1(x'_1+x'_2)+x_2(x'_1+x'_2)$$
$$=(x_1+x_2)(x'_1+x'_2)$$

$$b=X_1X_2+X_1X_3+X_1X_4+X_2X_3+X_2X_4+X_3X_4$$
$$=x_1^2x'_1x'_2+x_1x_2x'^2_1+x_1x_2x'_1x'_2+x_1x_2x'_1x'_2$$
$$+x_1x_2x'^2_2+x_2^2x'_1x'_2=x'_1x'_2(x_1^2+x_2^2)$$
$$+x_1x_2(x'^2_1+x'^2_2)+2x_1x_2x'_1x'_2=x'_1x'_2\left[(x_1+x_2)^2\right.$$
$$\left.-2x_1x_2\right]+x_1x_2\left[(x'_1+x'_2)^2-2x'_1x'_2\right]$$
$$+2x_1x_2x'_1x'_2$$

$$-c = X_1X_2X_3 + X_1X_2X_4 + X_1X_3X_4 + X_2X_3X_4$$
$$= x_1x_2x'^2_1x'_2 + x_1^2x_2x'_1x'^2_2 + x_1x_2^2x'^2_1x'_2$$
$$+ x_1x_2^2x'_1x'^2_2 = x_1x_2x'_1x'_2(x_1x'_1 + x_1x'_2 + x_2x'_1$$
$$+ x_2x'_2) = x_1x_2x'_1x'_2(x_1 + x_2)(x'_1 + x'_2)$$

$$d = X_1X_2X_3X_4 = x_1^2x_2^2x'^2_1x'^2_2.$$

Dar cum din ecuaţiile de gradul al 2-lea date putem scrie imediat:

$$(1)\quad x_1 + x_2 = -p,\quad x_1x_2 = q,\quad x'_1 + x'_2 = -p',$$
$$x'_1x'_2 = q',$$

valorile lui a, b, c, d de mai sus, devin folosind relaţiile (1):

$$a = -pp',\quad b = q'(p^2 - 2q) + q(p'^2 - 2q') +$$
$$2qq' = p^2q' - 2qq' + p'^2q,\quad c = -pp'qq,\quad d = q^2q'^2$$

a, b, c, d fiind calculaţi, ecuaţia de gradul al 4-lea cerută, este:

$$X^4 - pp'X^3 + (p^2q' - 2qq' + p'^2q)X^2$$
$$- pp'qq'X + q^2q'^2 = 0.$$

Soluţii date de d-nii: *Babeş Al.* (lic. Internat, Iaşi), *Băncilă Mircea* (lic. Braşov), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Beju Traian* (lic. Arad), *Berdan C.* (Bucureşti), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braeşter Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Căldăraru Leon* (Bucureşti), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Dânga S. Vlad* (lic. Orheiu), *Dumitrescu A. Mişu* (lic. Roman), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Eleomir, Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iaşi), *Frătici I.* (Şc. Polit. Timişoara), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov), *Ghelber Mauriciu* (Sem. Ped. Bucureşti), *Gherbanovsky Nicolae* (lic. Orheiu), *Golcea Cornel* (st. Bucureşti), *Grabovski Eugen* (lic. Orheiu), *Grigore T. V.* (lic. Tg.-Jiu), *Grofşoreanu I. Gheorghe* (lic. Lugoj), *Hătăran Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Ianculescu Octavian* (Cond. de Mine), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Angelo* (lic. Cluj), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Lepădatu I. Victor* (Iaşi), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Manoil Adolf* (Roman), *Mihăilescu A. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Mihăilescu Şt, Nicolae* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Ioniţă M. Ion* (Subloc. de Artilerie), *Muşta Ştefan* (Cluj), *Neumann Maria* (Lugoj), *Nicolau G. C.* (lic. R.-Sărat), *Olariu T. Enea* (Şc. Polit. Timişoara), *Pasco Wilhelm* (Bucureşti), *Piperiu N. Nicuşor* (lic. Internat, Iaşi), *Podeanu P. Aurel* (lic. Piteşti), *Pop Iulian* (Cluj), *Popa Ilie* (lic. Internat, Iaşi), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici Aurel* (lic. Focşani), *Popovici Ç. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ioan* (Şc. Polit., Bucureşti), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Scripcă Laur* (lic. Naţional, Iaşi), *Şerban I. Tiberiu* (lic. Zărneşti), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Spârchez Zeno* (Şc. Polit., Timişoara), *Stroescu I. Gheorghe* (lic. Tg.-Mureş), *Staicu Irimie* (lic. Braşov), *Stănciulescu A. George* (Piteşti), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ulea Titus* (lic. Internat, Iaşi), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vasiliu N. Şt.*, *Vlădea Ioan* (lic. Braşov) şi *Vulpanovici Boris* (lic. Chişinău).

392. — *Să se rezolve în numere întregi şi pozitive, ecuaţia:*

$$x^2(2y + z)^2 - 5(x + 1)(2y + z) + 9 = 0.$$

POPOVICI C. C-TIN

Observăm că primii doi termeni se divid cu $2y + z$, trebue ca şi ultimul termen să se dividă, adică $2y + z$ să fie un divizor a lui 9 şi fiind pozitiv, putem lua:

$$2y + z = 1,\quad 2y + z = 3,\quad 2y + z = 9$$

Inlocuind în ecuaţia dată, obţinem respectiv ecuaţiile în x:

$x^2 - 5x + 4 = 0$, cu rădăcinele; $x_1 = 1$, $x_2 = 4$

$3x^2 - 5x - 2 = 0$, „ „ $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{1}{3}$

$9x^2 - 5x - 4 = 0$, „ „ $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{4}{9}$

Vom considera evident numai valorile întregi şi pozitive.

Pentru a avea $2y + z = 1$, putem lua numai $y = 0$, $z = 1$, în care caz $x = 1$, sau $x = 4$.

Pentru a avea $2y + z = 3$, putem lua $y = 0$, $z = 3$; $y = 1$, $z = 1$ în care cazuri $x = 2$.

Pentru a avea $2y + z = 9$, putem lua $y = 0$, $z = 9$; $y = 1$, $z = 7$; $y = 2$, $z = 5$; $y = 3$, $z = 3$; $y = 4$, $z = 1$, în care cazuri $x = 1$.

Sistemele de soluţii în număr de 9, sunt rezumate în următorul tablou:

x	1	4	2	2	1	1	1	1	1
y	0	0	0	1	0	1	2	3	4
z	1	1	3	1	9	7	5	3	1

Soluţii date de d-nii: *Antistescu Nicolae* [lic. Internat, Iaşi], *Babeş Alexandru* [lic. Internat, Iaşi], *Berdan C.* [Bucureşti], *Blasko Beatrix* [Lugoj], *Botea G. Nicolae* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Braeşter Otto* [lic. Naţional, Iaşi], *Bruda Nicolae* [lic. Făgăraş], *Caracaş I. Gh.* [lic. Botoşani], *Căldăraru Leon* [Bucureşti], *Cocorandu Dan* [lic. Braşov], *Comănescu-Bălteni Al., Florescu M. Octavaian* [lic. Caracal], *Frăţici I.* [Şc. Polit. Timişoara], *Goldstein N., Hărătău D. Gheorghe* [lic. Internat, Iaşi], *Iacob St. Eug.* [Botoşani], *Ionescu Th. Andrei Bujor* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Iscovici Paul* [lic. Piteşti], *Marini Paul* [stud., Cluj], *Miu M. Ioan* [lic. Caracal], *Neumann Maria* [studentă], *Nicolau C.* [lic. R.-Sărat], *Oana Ioan* [lic. Făgăraş], *Podeanu Aurel* [lic. Piteşti], *Polaczek Franz* [lic. Câmpulung, Bucovina], *Popa Ilie* [lic. Internat, Iaşi], *Popescu N. Corneliu* [lic. Giurgiu], *Piperiu N. Nicuşor* [lic. Internat, Iaşi], *Popovici Th. Ioan* [student, Bucureşti], *Popovici Aurel* [lic. Focşani], *Popper Ervin* [lic. Timişoara], *Puşcă I. Toma* [lic. Internat, Iaşi], *Râmniceanu Radu* [Tg.-Jiu], *Râpeanu Virgil* [lic. Internat, Iaşi], *Russu C. D.* [lic. Internat, Iaşi], *Stamatiu I. Mihail* [Şc. Polit. Bucureşti], *Ştefănescu Emil, Stoica N. Aureliu, Tăraş Vasile* [lic. Braşov], *Tărăbuţă C. Paul* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Tunaru R. Traian* [lic. Carol, Craiova], *Teodorescu N.* [lic. Spiru Haret, Bucureşti], *Vlădea Ioan* [lic. Braşov], *Vulpanovici Boris* [lic. Chişinău] şi *Zanfirescu Ion* [lic. Fr. Buzeşti, Craiova].

395. — *În două sisteme de numeraţie a căror bază diferă cu unitatea, un număr e reprezentat prin 3114 şi 2011. Care sunt bazele acelor sisteme de numeraţie şi care este numărul în sistemul zecimal ?*

I. PROTOPOPESCU

Fie N numărul cerut. Conform enunţului el este reprezentat prin 3114 în baza x, şi 2011 în baza $x+1$.

Avem deci: $N = 3x^3 + x^2 + x + 4$

$$N = 2(x+1)^3 + (x+1) + 1,$$

Rezultă:

$$3x^3 + x^2 + x + 4 = 2(x+1)^3 + (x+1) + 1,$$

sau: $$x^3 + 5x^2 - 6x = 0$$

$$x(x^2 + 5x - 6) = 0,$$

ecuaţia care admite rădăcinele:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = -1$$

Evident cu numai $x = 6$ satisface enunţul.

Bazele căutate sunt deci 6 şi 7, iar numărul cerut este:

$$N = 3 \times 6^3 + 6^2 + 6 + 4 = 2 \times 7^3 + 7 + 1 = 694.$$

Soluţii date de d-nii: *Berdan C.* [Bucureşti], *Beşchea Nicolae* [lic. Braşov], *Blasko Beatrix* [Lugoj], *Bocancea I. Kirilă* [lic. T.-Mureş], *Botea G. Nicolae* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Braeşter Otto* [lic. Naţional, Iaşi], *Brăileanu I. Marin* [Caracal], *Călniceanu Gh. Gheorghe* [lic. Tg.-Jiu], *Cernes Mony* [lic. Naţional, Iaşi], *Dânga S. Vlad* [lic. Orhei], *Diaconescu V. Teodor* [lic. Caracal], *Diaconu Gh., Dorneanu Vasile* [lic. Internat, Iaşi], *Dravăţ I. Ioan* [lic. Ploeşti], *I. N. Georgescu-Val* [Şc. Specială, Artilerie], *Goldstein N.* [Cetatea-Albă], *Grigore M. Nicolae* Învăţ., Ialomiţa], *Ionescu Gh. C-tin* [lic. Tg.-Mureş], *Ionescu Th. Bujor C-tin* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ioniţă M. Ioan* [Sublt], *Iscovici I. Paul* [lic. Piteşti], *Katz Lazăr* [Botoşani], *Manafu Valeriu* [lic. M-rea Dealu], *Marcovici H.* [lic. Botoşani], *Marcovici M. Mauriciu* [lic. Botoşani], *Mihăilescu A. C.* [lic. Internat, Iaşi], *Mihăileseu St. Niculae* [lic. Matei-Basarab, Bucureşti], *Miu M. Ioan* [lic. Caracal], *Nan Victor* [Şc. Polit. Timişoara], *Neumann Maria* [Lugoj], *Podeanu P. Aurel* [lic. Piteşti], *Polaczek Franz* [lic. Câmpulung, Bucovina], *Pop Alexandru* [student, Cluj], *Popescu N. Corneliu* [lic. Giurgiu], *Popovici C. C-tin* [lic. Internat, Iaşi], *Popovici Th. Ioan* [Şc. Polit. Bucureşti], *Râmniceanu L. Radu* [lic. Tg.-Jiu], *Răpeanu Virgil* [lic. Internat, Iaşi], *Roşu Al. Alexandru* [lic. M-rea Dealu], *Şerban Tiberiu* [Şc. Polit. Bucureşti], *Spârchez Zeno* [Şc. Polit. Timişoara], *Stamatiu I. Mihail* [Şc. Polit. Bucureşti], *Ştefănescu Emil* [Bucureşti], *Stoica Aureliu* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Stroescu I. Gheorghe* [lic. Tg.-Mureş], *Tărăbuţă C. Paul* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Teodorescu N.* [lic. Spiru Haret, Bucureşti], *Tăraş Vasile* [Braşov], *Vlădea Ioan* [lic. Braşov], *Vulpanovici Boris* [lic. Chişinău] şi *Zarda Ioan* [lic. Tg.-Jiu].

396.* *Să se arate că $5^n!$ se termină cu un număr de zeruri egal cu spaţiul lui $5^n - 1$.*

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

Soluţie dată de d-nii: *Berdan C.* (Şc. Polit., Bucureşti), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea N.* (lic. Cantemir, Bucureşti). *Pop A.* (student, Cluj), *Ştefănescu E.* (student, Bucureşti) şi *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti).

Zerurile cu care se termină $5^n!$ provin din înmulţirea lui 2 cu 5. Cum $5^n!$ are pe 2 la un exponent mai mare de cât pe 5 urmează că exponentul lui 5 va da numărul zerurilor cu care se termină $5^n!$.

Cea mai mare putere α a unui număr m care divide factorialul $q!$ este dată de formula:

$$(1) \qquad p = E\left(\frac{q}{m}\right) + E\left(\frac{q}{m^2}\right) + \ldots + E\left(\frac{q}{m^\alpha}\right)$$

unde E(N) înseamnă, după notația lui *Legendre* partea întreagă a lui N.

Inlocuind în (1) pe q prim 5^n și pe m prin 5 avem:

$$p=\frac{5^n}{5}+\frac{5^n}{5^2}+\ldots+\frac{5^n}{5^n}$$

$$=5^{n-1}+5^{n-2}+\ldots+1=\frac{1}{4}(5^n-1).$$

Deci $5^n!$ se termină cu $\frac{1}{4}(5^n-1)$ zeruri.

Observațiuni. 1°. D-l *Ștefănescu E.* observă că numerile 5^n+1; $5^n!+2$; $5^n!+3$ și $5^n!+4$ se termină tot cu $\frac{1}{4}(5^n-1)$ zeruri.

2°. D-l *Botea N.* observă că în problema 3132 publicată în *Gazeta Matematică*, vol. XXIX, pag. 473, s'a demonstrat că α este un număr întreg pozitiv atunci:

$$\alpha^n!=M(\alpha!)^{\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}}$$

în care făcând $\alpha=5$ se găsește:

$$5^n!=M(5!)^{\frac{5^n-1}{4}} \tag{2}$$

și conchide că aceasta este tocmai soluția problemei 396. Este ușor de văzut însă că relația (2) nu este tocmai răspunsul problemei 396.

3°. Au mai rezolvat problema d-nii: *Braester O.* (Iași), *Cernes Many* (lic. Național, Iași), *Podeanu A.* (Pitești), *Popa I.*, *Popovici I.*, *Stoica A.* (lic. Cantemir, București), *Stroescu G.* (lic. Tg.-Mureș) și *Tărăbuță P.* (lic. Mihai-Viteazul, București).

399. — *Dacă* $a+b+c=0$, *să se arate că avem:*

$$\frac{a^2}{a^2-(b-c)^2}+\frac{b^2}{b^2-(a-c)^2}+\frac{c^2}{c^2-(a-b)^2}=\frac{3}{4}$$

I. DIMITRIU-ARAD.

Din relațiile de condiție deducem:

$$a+b-c=-2c,\quad b+c-a=-2a,$$

$$c+a-b=-2b,$$

care multiplicate câte două, ne dau:

$$b^2-(a-c)^2=4ac,\quad a^2-(b-c)^2=4bc,$$

$$c^2-(a-b)=4ab.$$

Atunci primul membru al identității cerute, se poate scri succesiv:

$$(1)\ \frac{a^2}{a^2-(b-c)^2}+\frac{b^2}{b^2-(a-c)^2}+\frac{c^2}{c^2-(a-b)^2}$$

$$=\frac{a^2}{4bc}+\frac{b^2}{4ac}+\frac{c^2}{4ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{4abc}$$

Tot din relatia de condiție deducem încă:

$$(a+b)^3=-c^3 \text{ sau } a^3+b^3+c^3=$$

$$-3ab(a+b)=3abc,$$

atunci:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{4abc}=\frac{3abc}{4abc}=\frac{3}{4}$$

și (1) devine:

$$\frac{a^2}{a^2-(b-c)^2}+\frac{b^2}{b^2-(a-c)^2}+\frac{c^2}{c^2-(a-b)^2}=\frac{3}{4}$$

tocmai identitatea cerută.

Soluții date de d-nii: *Agapescu M. Niculai* (Sem. Ped. Iași), *Anastasescu P. Vasile* (lic. Botoșani), *Andron Gheorghe* (lic. Brașov), *Apostoliu C. Ioan* (lic. Șincai, București), *Ardelea Radu* (lic. Mil. Craiova), *Băncilă Mircea* (lic. Brașov), *Berdan C.* (București), *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Bey M. Gheorghe* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Botez St. Mihail*, *Braester Otto* (lic. Național, Iași), *Budișteanu Al.* (lic. M-rea Dealu), *Caracaș I. Gh.* (lic. Botoșani), *Caracostea A.*, *Căldăraru Leon* (București), *Călin M. Gheorghe* (lic. Caracal), *Cernes M.* (lic. Național, Iași), *Chinie Mihail* (lic. Pitești), *Costăchescu N. Ionel* (lic. Brăila), *Constantinescu G. Gheorghe* (lic. Craiova), *Constantinescu C. Marius* (lic. Slatina), *Corșoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Cristescu C. Ioan* (lic. Șincai, București), *Curcubată Dionisie* (lic. Brașov), *Dânga S. Vlad* (lic. Orheiu), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dimitrescu Mișu* (lic. Roman), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Dravăț Ioan* (lic. Ploești), *Drăgan G.* (lic. Brașov), *Ebner Arthur* (lic. Galați), *Eleomir*, *Fezi Gh.* (lic. Orheiu), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Frătici I.* (Șc. Polit. Timi-

şoara), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gârleşteanu Mihail* (Şc. Polit. Timişoara), *I. N. Georgescu-Val.*, *Ghelber Mauriciu* (Sem. Ped. Bucureşti), *Gherbanowsky J. Nicolae* (lic. Orheiu), *Goldstein N.* (Cetatea-Albă), *Grabovski Eugeniu* (lic. Orheiu), *Grigore T. Vir.* (lic. Tg.-Jiu), *Grozăvescu D tru* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Grozăvescu Gr. Petre* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Grubenmann Ionel* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Iacob St. Eug.* (lic. Botoşani), *Ioachim Grigore* (lic. Mil. Iaşi), *Ianculescu Octavian* (Cond. de mine), *Ieremia Petru* (lic. Timişoara), *Ionescu Angelo* (lic. Cluj), *Ionescu Bujor Th. Andrei* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu C-tin* (lic. Tg.-Mureş), *Ionescu Bujor Th. C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu A. Ştefan* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Ionescu Gh. Stelian* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Ioniţă M. Ioan* (Sublocot.), *Iscovici Paul* (lic. Piteşti), *Iunghaus R. Gheorghe* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova) *Katz L.* (Botoşani), *Kertesz Paul* (lic. Arad), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Manoil Adolf* (Roman), *Marcovici H.* (lic. Botoşani), *Marcovici M. Mauriciu* (lic Botoşani), *Mareş Grigore* (lic. Bacău), *Mariş Marius* (lic. Arad), *Mihailescu A. C.* (lic. Internat, Iaşi), *Mihăilescu Şt. Nicolae* (lic. Matei-Basarab, Bucuresti), *Mihailescu Tase* (lic. Braşov), *Minea I. Titus* (lic. Roman), *Miu M. Ioan* (lic. Caracal), *Moaşa D-tru* (lic. Braşov), *Moaşa Virgil* lic. Braşov), *Morărescu Aurel* (lic. M-rea Dealu), *Nan Victor* (Şc. Polit. Timişoara), *Nedelescu Damian* (lic. Caracal), *Neacşu Vasile* (lic. Braşov), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Neumann Maria* (stud. Lugoj), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Niculescu St. Emanuel* (lic. Mil. Craiova), *Novacu A. C. Valeriu* (lic. Arad), *Oana Ioan* (lic. Făgăraş), *Olariu Enea* (Şc. Polit. Timişoara), *Papadopol Calimah C-tin* (Bucureşti), *Păunescu D. Trifon* (lic. Piteşti), *Pelin I. Ioan* (lic. Bacău), *Petrescu M. Ioan* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Podeanu Aurel* (Piteşti), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Pop Alexandru* (stud., Cluj), *Pop Iulian* (Cluj), *Popa Iulian* (lic. Făgăraş), *Popa Petrescu Nicolae* (lic. Braşov), *Popescu T. Theodor* (lic. Giurgiu), *Popovici Aurel* (lic. Focşani), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ioan* (Şc. Polit., Bucureşti), *Predescu I. Nicolae* (lic. Caracal), *Purdilă C-tin* (lic. Braşov), *Rădulescu Nicolae* (lic. Caracal), *Rămniceanu L. Radu* (lic. Tg.-Jiu), *Răpeanu Virgiliu* (lic. Internat, Iaşi), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Braşov), *Rătan I.* (lic. Braşov), *Rusanda Gheorghe* (lic. Arad), *Şerban Aurel* (lic. Braşov), *Şerban Tiberiu* (Şc. Polit., Bucureşti), *Scripcă Laur* (lic. Naţional, Iaşi), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Spârchez Zeno* (Şc. Polit., Timişoara), *Stamatiu I. Mihail*, *Ştefănescu Emil*, *Stoiadi I.* (lic. Braşov), *Stoicoiu M. Traian* (lic. Tg.-Jiu), *Staicu Irimie* (Bucureşti), *Stoica Aurel* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Stroescu I. Gheorghe* (lic. Tg.-Mureş), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Tunaru R. Traian* (lic. Carol, Craiova), *Ţanovici V. C-tin* (lic. Ploeşti), *Ţigoiu I.*, *Ulea Titus* (lic. Internat, Iaşi), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vlădea Ioan* (lic. Iaşi), *Voinescu D. Ioan* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Welea Gr. Mihail* (lic. Mil. Craiova), *Zaida Jan* (lic. Tg.-Jiu) şi *Zamfirescu Ioan* (lic. Fr. Buzeşti).

400. — x_1, x_2, x_3 *fiind rădăcinele ecuaţiei* $x^3 + px + q = 0$, *să se formeze ecuaţia care admite rădăcinele:*

$$x_1 + x_2 - 2x_3^2, \quad x_2 + x_3^2 - 2x_3^2, \quad x_3^2 + x_1^3 - 2x_2^3$$

TAUBER ALEXANDRU

Soluţii date de d-nii: *Berdan C.* (Bucureşti), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov), *Goldstain N.* (Cetatea-Albă), *Grigore T. Virgil* (lic. Tg.-Jiu), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Podeanu P. Aurel* (lic. Piteşti), *Popovici Aurel* (lic. Focşani), *Popovici Th. Ioan* (Şc. Polit. Bucureşti), *Râmniceanu L. Radu* (lic. T.-Jiu), *Stamatiu Mihail* (Şc. Polit. Bucureşti), *Ştefănescu Emil*, *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti) şi *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti).

Scrim întâi relaţiile între rădăcinele şi coeficienţii ecuaţiei date, anume:

$$(1) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p,$$
$$x_1x_2x_3 = -q.$$

Notând cu X_1, X_2, X_3 rădăcinele ecuaţiei cerute, putem scri succesiv ţinând seamă de relaţiile (1).

$$(2) \quad X_1 = x_1^3 + x_2^3 - 2x_3^3 = (x_1 + x_2)^3$$
$$- 3x_1x_2(x_1 + x_2) - 2x_3^3 = -x_3 + 3x_1x_2x_3 - 2x_3^3$$
$$= 3x_3(x_1x_2 - x_3^2)$$

Dar din (1):

$x_3 = -x_1 - x_2$ şi multiplicând cu x_3, avem:

$$x_3^2 = -x_1x_3 - x_2x_3.$$

Atunci substituind în (2) și folosind și a 2-a din relațiile (1) obținem:

$$X_1 = 3x_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 3px_3.$$

In mod analog:

$$X_2 = 3px_1,\ X_3 = 3px_2.$$

Pentru a construi acum ecuația dată, facem suma, suma produselor câte două, și produsul rădăcinelor ei și, ținând seama și relațiile (1), avem succesiv:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 3p(x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

$$X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 = 9p^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_2) = 9p^3$$

$$X_1X_2X_3 = 27p^3x_1x_2x_3 = -27p^3q.$$

Rezultă că ecuația cerută este:

$$X^3 + 9p^3X + 27p^3q = 0.$$

PROBLEME PROPUSE

430. — Să se găsească un număr de patru cifre prim, format din patru cifre consecutive.

N. TEODORESCU

431. — Cu 1120 lei se cumpără un număr de bilete de intrare de rangul I și II. Știind că cele de rangul I costă 110 lei biletul, iar cele de rangul II, 70 lei biletul, să se găsească numărul biletelor de rangul I și II cumpărate.

V. VALCOVICI

432. — Se dă un cerc I tangent interior unui cerc O, în punctul A. Prin I se duce un diametru perpendicular pe diametrul comun, și care tae cercul I în B și C, iar cercul O în D și E. Dreapta AE tae cercul I în F, dreapta AC tae cercul O în P, PI tae cercul I în R și G. Să se arate că FR este paralelă cu diametrul comun cercurilor.

IONESCU TH. ANDREI BUJOR

433. — In cercul O se înscrie un triunghiu ABC Se proectează vârfurile B și C în B_1, C_1 pe tangenta în A la cercul O. Fie A_1 piciorul înălțimei AA_1 pe latura AC, O′ centrul cercului circumscris triunghiului $A_1B_1C_1$ și E, E′ mijloacele laturilor AB și AC. Să se dovedească că patrulaterul OEO′E′ este un paralelogram.

V. ALACI

434. — Să se determine p și q astfel ca între rădăcinele ecuației:

$$x^2 + px + q = 0,$$

să avem relațiile:

$$x'x'' = 2(x' - x'')^2$$

$$x'x'' = (1 - x')(1 - x'') - 1.$$

ATANASIU TH. C-TIN

435. — Să se verifice identitatea:

$$\begin{vmatrix} (s_4 - a_1)^2 & a_1^2 & a_1^2 & a_1^2 \\ a_2^2 & (s_4 - a_2)^2 & a_2^2 & a_2^2 \\ a_3^2 & a_3^2 & (s_4 - a_3)^2 & a_3^2 \\ a_4^2 & a_4^2 & a_4^2 & (s_4 - a_4)^2 \end{vmatrix} = a_1a_2a_3a_4 \sum_{i=1}^{4} \frac{(s_4 - a_i)^5}{a_i}$$

unde: $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_3$.

CONSTANTINESCU GH

436. — Știind că x_1 și x_2 sunt rădăcinele ecuației:

$$x^2 + px + p + 1 = 0,$$

să se afle maximul funcțiunei:

$$y = \operatorname{arc\,tg} x_1 \operatorname{arc\,tg} x_2.$$

Să se rezolve ecuația în acest caz.

EMIL STEFANESCU

437. — Să se stabilească relația:

$$s = \frac{r^2}{2}\left(\frac{a + 2c}{h_a} + \frac{b + 2a}{h_b} + \frac{c + 2b}{h_c}\right)$$

notațiile fiind cele obicinuite.

SUBLOCOT I. M. IONITA

Revista Matematică din Timişoara, apare sub conducerea unui comitet compus din următorii:

Abasohn Ernest, inginer, licenţiat în matematici, profesor la liceul Cantemir. Justinian, 18, Bucureşti

Abramescu N., doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.

Adamescu Maxim, licenţiat în matematici, inspector financiar. Str. Flondor 37, Cernăuţi.

Arghir Iancu, profesor la liceul din T.-Jiu.

Alaci Valeriu, doctor în matematici, profesor la Şcoala Politechnică Timişoara. Piaţa Doja 12, Timişoara.

Alexandrescu El., profesoară la externatul secundar de fete din Constanţa. Argenoianu 7, Constanţa.

Angelescu A., doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.

Angheluţă Th., doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.

Bădulescu Vasile, profesor, liceul Şincai, Bucureşti.

Balaban N., profesor, liceul Carol I, Craiova.

Balaban Gh., profesor, şcoala secundară de fete gr. II, Sturza Cantacuzino, Roman

Balazs D., inginer, asist. la Şcoala Politechnică Str. General Joffre 12, Timişoara.

Bănărescu Marin, inginer, la atelierele C. F. R., prof. la Politechnică. Str. Doja 51, Timişoara.

Banciu I., profesor. Str. Lucaci 95, Bucureşti.

Baron C., asistent la catedra de fizică la Şc. Politechnică din Timişoara.

Blaşian V., inginer de mine, Subdir.-general al Soc. Reşiţa prof la Şc. Politechnică.

Botez Mihai, profesor la Şcoala normală şi Liceul Militar. Str. Speranţei 8, Iaşi,

Bratu Gh., doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.

Breazu D. profesor la liceul din Caracal

Buicliu Gh., locot.-colonel în artilerie, Director de studii la şcoala specială de artilerie, profesor la Şcoala Politechnică Timişoara.

Burghele C., inginer, asistent la Şcoala Politechnică Timişoara, Director la Fabrica Energia.

Cândea C., doctor-inginer, profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara.

Caraman E., director la şcoala Normală Galaţi.

Cardeiu V., prof. la liceul Dragoş-Vodă, Câmpulungul moldovenesc Bucovina.

Chivulescu C., licenţiat în matematici, inspector financiar Târgovişte.

Cismărescu M., licenţiat în matematici, inspector financiar T.-Severin.

Corneanu P., inginer la Soc. Româno-Americană Câmpina.

Cristescu I., inginer, profesor la Şcoala Politechnică Timişoara.

Coman August, director liceul C. Diaconovici-Loga, Str. Feldioara 1, Timişoara.

Diaconescu Nicolae profesor liceul din Slatina,

Dragalina Corneliu, locot.-colonel. Str. G-ral Dragalina 1, Bucureşti

Dumitrescu Crt., profesor la lic. Militar M-rea Dealul Târgovişte.

Dumitrescu Gh., doctor în matematici, profesor la Universitatea din Cluj.

Dumitriu-Arad I., profesor la liceul Moise Nicoară. Str. Bucur No. 3, Arad.

Duţulescu Marin, licenţiat în matematici, inspector financiar. Str. Eminescu 20, Bucureşti.

Florescu P. Mihai, inginer, inspector silvic. Str. Alex. Orescu, 9 Bucureşti.

Georgescu D., profesor la liceul din Piteşti. Str. Negru-Vodă 14, Piteşti.

Ghermănescu M., profesor la liceul Cantemir. Str. Raion 31, Bucureşti.

Hubert M., inginer, profesor la Şcoala de meserii, asistent la Şc. Politechnică. Bul. Mihai-Viteazul 21, Timişoara

Ionescu K. C., directorul liceului Real din Braşov, Dr. Mesotă.

Jecu M. Ion, licenţiat în matematici. Str. V. Lascăr (Teilor) 77, Bucureşti.

Lalescu Traian, doctor în matematici, profesor la Universitate şi Şcoala Politechnică din Bucureşti, fost rector la Şc. Polit. din Timişoara deputat.

Linteş I., căpitan. Licurg 4, Bucureşti.

Liteanu Gh., maior în artilerie. Alea Sevastopol 27, Bucureşti.

Lupan Andrei, inginer, director la Soc. Reşiţa, profesor la Şc. Politechnică. Str. Lonovici, Timişoara.

Manughevici C., inginer-chimist, şef de lucrări la Şc. Politechnică. Str. Paul Chinezul 7, Timişoara.

Mardan D., inginer de mine, directorul fabricei de tutun, profesor la Şcoala Politechnică din Timişoara. Fabrica de tutun Timişoara.

Mihaly Elemér, profesor la liceul Deva.

Nichifor Gh., doctor în matematici, conferenţiar la Universitatea din Bucureşti. Str. Racoviţă 32, Bucureşti.

Noaghea Gh., profesor la liceul din Caransebeş.

Onicescu O., Clopotarii vechi 25, Bucureşti.

Orăşeanu C., inginer, licenţiat în matematici, profesor la Şc. Politechnică Bucureşti.

Orăşanu Gr., profesor la liceul Sf. Petru şi Pavel Ploeşti.

Petrescu A., doctor în matematici, Directorul Academiei Agricole, Cluj.

Petricoane D. M.,	directorul liceului din Oravița
Purcariu Ilie,	directorul General al Ministerului Instrucției.
Roibănescu C.,	dir. liceului T.-Vladimirescu Tg.-Jiu.
Protopopescu I.,	inginer, subdirectorul Școalei Politechnice Timișoara.
Saegiu E.,	inginer, serviciul construcții C. F. R. Str. Berzei 70, București.
Sergescu P.,	doctor în matematici, licențiat in filozofie profesor supl. la Universitate Ghica-Vodă 16, Craiova.
Simniceanu Sava,	directorul Școalei Normale Craiova.
Spineanu Cezar,	profesor, deputat Târgoviște.
Stăncescu C.,	doctor, inginer, profesor la Școala Politechnică. Str. Bem 8, Timișoara.
Stoicescu M.,	profesor la liceul Real Prașov.
Severineanu C.,	inginer, subdirectorul Serviciului Direcțiunei C. F. R., profesor la Șc. Politechnică Timișoara.
Teodorescu C.,	inginer, directorul Șc. Superioare P. T. T., profesor la Șc. Politechnică Timișoara.
Țepeneag E.,	direct. Șc. Comerciale din Orșova.
Thierrin Gabriel	directorul Inst. Schewitz Thierrin. Str. Scaune 33, București.
Tino Ovidiu,	profesor liceul Șincai. Str. Cornea 80, București.
Toporescu E.,	doctor în chimie dela Sorbona, Rafineria Steaua Română Câmpina.
Teodosiu Avram,	doctor în matematici, profesor la Academia de Agricultură, Cluj.
Vâlcovici V.,	doctor în matematici, Rectorul Școalei Politechnice. Str. Doja 33, Timișoara.
Vasiliu M.,	inginer. Str. Obedenaru 10, București.
Vasiliu Gh.,	inginer la depoul C. F. R. Str. Gen. Foch Timișoara.
Vlad I. M.,	inginer, arhitect, profesor la Școala Politechnică. Str. Bonnaz 20 Timișoara.
Zapan Grigore	căpitan-aviator. Str. Carol 9, Tecuci.

INFORMATIUNI

Incepând cu acest număr, anunțăm că nu vom mai lua în considerare, problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul V-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

60 (ȘASEZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL V. 15 APRILIE 1925 NO. 2.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 6 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 60 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. TIBERIU POPOVICI. ASUPRA UNOR DETERMINANTI SI A ECUATIILOR LOR CARACTERISTICE.
2. NOTE MATÉMATICE, 2.
4. BIBLIOGRAFIE.
6. PROBLEME REZOLVATE: 352, 354, 358, 394, 403, 404.
7. PROBLEME PROPUSE.
8. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat 60 lei
Anul III, broșat, 60 lei.

ANUL V. — NO. 2. TIMISOARA, 15 APRILIE 1925

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 6 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 60 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

ASUPRA UNOR DETERMINANȚI ȘI A ECUAȚIILOR LOR CARACTERISTICE

de TIBERIU POPOVICI
student în mat.

1. Să considerăm determinantul:

$$\| a_{ik} \|,$$

și să presupunem că între elementele lui avem relația:

$$(1) \qquad a_{rs} + p\,a_{sr} + q = 0 \qquad r \geqq s.$$

In „*Jurnal Matematic*“, vol. I, pag. 129, am studiat câteva proprietăți ale acestor determinanți pe cari i-am numit determinanți *pseudo-simetrici* de oarece ei generalizează determinanții simetrici, dar mai ales determinanții simetrici stângi.

In articolul de față voi studia în special cazul când $q = 0$ adică, când relația (1) devine:

$$(1') \qquad a_{rs} + p\,a_{sr} = 0 \qquad r \geqq s.$$

Dacă facem $r = s$ se observă că trebue să avem:

$$a_{rr} = 0,$$

oricare ar fi r, adică acești determinanți au *diagonala goală*. In cazul $p = 1$ obținem determinanții simetrici stângi, iar în cazul $p = -1$, determinanții simetrici cu diagonala goală.

2. Presupunând că p e o cantitate variabilă se vede numai decât că egalitatea:

$$(2) \qquad f(p) = \| a_{ik} \| = 0,$$

este o ecuație algebrică de gradul $n-1$ fără termen liber de p, căci în virtutea egalității (1') dacă facem $p = 0$ toate elementele situate de oparte a diagonalei principale sunt nule, n fiind ordinul determinantului.

Determinantul desvoltat se scrie:

$$f(p) = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -p\,a_{12} & a & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p\,a_{1n} & -p\,a_{2n} & \dots & -p\,a_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix}$$

Dacă punem în loc de p pe $\frac{1}{p}$ și înmulțim fiecare linie cu p obținem:

$$\frac{1}{p^n} f\left(\frac{1}{p}\right) = \begin{vmatrix} 0 & -p\,a_{12} & p\,a_{13} & \dots & p\,a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & p\,a_{23} & \dots & p\,a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & -a_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix}$$

și schimbând semnele, apoi coloanele cu linii, avem:

$$(3) \qquad (-1)^n \frac{1}{p^n} f\left(\frac{1}{p}\right) = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ -p\,a_{12} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ -p\,a_{13} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p\,a_{1n} & -p\,a_{2n} & \dots & -p\,a_{n-1,n} & 0 \end{vmatrix} = f(p),$$

ceeace probează că avem:

Teorema. I. Un determinant pseudo-simetric caracterizat de relația:

$$a_{rs} + p\,a_{sr} = 0 \qquad r \geqq s,$$

egalat cu zero, este o ecuație reciprocă în raport cu p de gradul $n-2$.

Factorul p cu care se divide $\| a_{ik} \|$ se presupune suprimat.

In virtutea unor proprietăți ale ecuațiilor reciproce de grad impar, deducem dacă $n-2$ adică și n este impar.

Consecința I. Un determinant simetric stâng de ordin impar este identic nul.

Aceasta se vede de altfel și din relația (3) care dacă $p=1$ și n impar se scrie:

$$-f(1)=f(1)$$

deci:

$$f(1)=0,$$

$f(1)$ fiind chiar un determinant simetric stâng.

3. Vom generaliza acum și proprietatea determinantului stâng de ordin par.

Determinantul se poate scrie:

$$\| a_{ik} \| = \begin{vmatrix} & & & x_1 \\ & & & x_2 \\ & \Delta & & . \\ & & & . \\ & & & x_{n-1} \\ -p x_1 & -p x_2 & \dots & -p x_{n-1} \quad 0 \end{vmatrix}$$

sau încă:

$$\| a_{ik} \| = \sum A_{ki} r_i r_k,$$

ceeace se mai poate scrie:

$$(4) \qquad \| a_{ik} \| = \sum A_{ki} x_i x_k = (\sum \sqrt{A_{kk}}\, x_k)^2 + \sum (A_{ki} + A_{ik} - 2\sqrt{A_{kk} A_{ii}})\, x_i x_k.$$

Să părăsim un moment această formulă și să ne fixăm atenția asupra minorilor primi ai unui determinant pseudo-simetric.

Dacă notăm acești minori cu A_{ki} sau mai bine $f_{ki}(p)$ vom putea scrie.

$$f_{ki}(p) = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{12} \dots & a_{1\,i-1} & a_{1\,i+1} \dots\dots & a_{1n} \\ -p a_{12} & 0 & a_{23} \dots & a_{2\,i-1} & a_{2\,i+1} \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p a_{1\,k-1} & -p a_{2\,k-1} & \dots & \dots & \dots & a_{k-1\,n} \\ -p a_{2\,k+1} & -p a_{2\,k+1} & \dots & \dots & \dots & a_{k+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -p a_{1n} & -p a_{2n} & \dots & \dots & -p a_{n-1\,n} & 0 \end{vmatrix}$$

$$f_{ik}(p) = \begin{vmatrix} 0 & -p a_{12} & -p a_{13} \dots & -p a_{1\,i-1} & -p a_{1\,i+1} \dots & -p a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -p a_{23} \dots & -p a_{2\,i-1} & -p a_{2\,i+1} \dots & -p a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1\,k-1} & a_{2\,k-1} & \dots & \dots & \dots & -p a_{k-1\,n} \\ a_{1\,k+1} & a_{2\,k+1} & \dots & \dots & \dots & -p a_{k+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & \dots & a_{n-1\,n} & 0 \end{vmatrix}$$

Se vede numai decât că avem relația;

$$f_{ki}(p) = \frac{(-1)^{n-1}}{p^{n-1}} f_{ik}\left(\frac{1}{p}\right)$$

care ne dă imediat:

$$f_{ki}\left(\frac{1}{p}\right) + f_{ik}\left(\frac{1}{p}\right) + m\sqrt{f_{kk}\left(\frac{1}{p}\right) f_{ii}\left(\frac{1}{p}\right)} = (-1)^{k-1} p^{n-1} \left[f_{ki}(p) + f_{ik}(p) + m\sqrt{f_{kk}(p) f_{ii}(p)} \right]$$

de oarece $f_{kk}(p)$ sunt determinanți pseudo-simetrici și deci satisfac relației (3). Aceasta ne arată că:

Teorema II. $f_{ki}(p)$ fiind minorii primi ai unui determinant pseudo-simetric de ordinul n, ecuația:

$$f_{ki}(p) + f_{ik}(p) + m\sqrt{f_{kk}(p) f_{ii}(p)} = 0,$$

*este reciprocă de gradul $n-2$, factorul p presupunându-se suprimat, oricare ar fi m.**)

Revenind acum la formula (4), se observă că $A_{k\,i}$ este un minor de ordinul întâi al determinantului pseudo-simetric Δ de ordinul $n-1$. In virtutea teoremei precedente rezultă că ecuația:

$$\frac{1}{p}\left(A_{k\,i}+A_{i\,k}-2\sqrt{A_{k\,k}\,A_{i\,i}}\right)=0,$$

este reciprocă în p de gradul $n-3$.

Dacă $n-3$ este impar, deci dacă n este par această ecuație e verificată pentru $p=1$, deci:

Consecința II. Un determinant simetric stâng de ordin par este un patrat perfect.

Valoarea determinantului în acest caz este:

$$\left[\Sigma\sqrt{A_{k\,k}}\,x_k\right]^2$$

$A_{k\,k}$ fiind determinanți simetrici stângi de grad pari. D-l Prof. *Th. Angheluță* a arătat prin inducție (Vezi G. M., vol. XXIX, pag. 326), că polinomul:

$$\Sigma\sqrt{A_{k\,k}}\,x_k$$

este rațional în raport cu elementele determinantului.

4. Să considerăm ecuația caracteristică a determinantului pseudo-simetric:

$$D(p)=\begin{vmatrix} \rho & a_{12} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ -p\,a_{1n} & \rho & \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ -p\,a_{1n} & -p\,a_{2n} & \ldots\ldots\rho \end{vmatrix}=0.$$

Dacă ρ_k este una din rădăcinele acestei ecuații, atunci sistemul:

$$a_{a\,1}x_1+a_{a\,2}x_2+\ldots+a_{a,a-1}x_{a-1}+a_{a,a+1}x_{a+1}+\ldots+a_{a\,n}x_n=-\rho_k x_a$$

$$(a=1,\ 2,\ \ldots n,\quad x_r\,s+p\,a_{s\,r}=0),$$

are soluție diferită de zero. Dacă notăm cu:

$$x_a=m_a+i\,m'_a \qquad (i=\sqrt{-1}) \tag{5}$$

și cu $\bar{x}_a$ imaginar conjugatul lui x_a, avem:

$$\sum_{a=1}^{n}(a_{a\,1}x_1+a_{a\,2}x_2+\ldots+a_{a,a-1}x_{a+1}+a_{a,a+1}x_{a+1}+\ldots+a_{a\,n}x_n)\,\bar{x}_a=-\rho_k\sum_{a=1}^{n}x_a\,\bar{x}_a.$$

Dacă ținem seamă de relația fundamentală (1′) și de (5) deducem că partea întâia se scrie:

$$\sum_{a=1}^{n}(a_{a\,1}x_1+a_{a\,2}x_2+\ldots+a_{a.\,a-1}x_{a-1}+a_{a,a-1}x_{a+1}+\ldots a_{a,n}x_n)\bar{x}_a=\sum_{a,\,b}a_{b,a}\left(\bar{x}_b\,x_a-p\,x_b\,\bar{x}_a\right)\qquad(b<a)$$

și:

$$\sum_{a,\,a}a_{b,\,a}(\bar{x}_b\,x_a-p\,x_b\,\bar{x}_a)=(1-p)\sum_{a,\,b}a_{b,\,a}(m_b\,m_a+m'_b\,m'_a)+i(1+p)\sum_{a,\,b}a_{b,\,a}(m_b\,m'_a+m'_b\,m_a). \tag{6}$$

Pe de altă parte coeficientul lui ρ_k este real căci $\bar{x}_a\,x_a=m_a^2+m'^2_a$ este real oricare ar fi a.

Forma (6) ne arată că în general nu putem ști cum sunt rădăcinele caracteristice.

Dacă facem $p=1$ relația (6) ne arată că rădăcinele sunt toate imaginare simple sau nule, deci:

Ecuația caracteristică a unui determinant simetric-stâng are toate rădăcinile imaginare simple sau nule.

Acest rezultat a fost damonstrat pe o cale mai puțin directă și de D-l Prof. *Th. Angheluță* în numărul citat al G. M.

Dacă $p=-1$ relația (6) este reală deci avem rezultatul următor:

Ecuația caracteristică a unui determinant simetric cu diagonala goală, are toate rădăcinele reale sau nule.

De altfel se poate demonstra absolut la fel că această teoremă subsistă și pentru ecuația caracteristică a unui determinant simetric oarecare.

---

*) De fapt acest lucru însemnează că ambele ecuațiuni:

$$f_{k\,i}(p)+f_{i\,k}(p)=0,\quad f_{k\,k}(p)\,f_{i\,i}(p)=0,$$

sunt reciproce.

NOTE MATEMATICE

2. *O teoremă relativă la determinanți.*

Dacă într'un determinant oarecare de ordinul m:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \dots & t_1 \\ x_2 & y_2 & \dots & t_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m & y_m & \dots & t_m \end{vmatrix}$$

înlocuim elementele unei coloane prin niște numere arbitrare $u_1, u_2, \dots u_m$, *apoi înmulțim determinantul obținut cu suma elementelor scoase și facem această operație pentru fiecare coaloană, atunci suma produselor astfel obținute este egală cu determinantul* Δ, *înmulțit cu suma numerilor arbitrare* $u_1\ u_2, \dots u_m$, *adică:*

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta_i s_i = (u_1 + u_2 + \dots + u_m)\,\Delta,$$

unde Δ_i *este determinantul obținut înlocuind în* Δ, *elementele de rangul* i, *prin* $u_1, u_2, \dots u_m$ *și:* $s_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, $s_2 = y_1 + y_2 + \dots + y_m$, $\dots s_m = t_1 + t_2 + \dots + t_m$.

Pentru aceasta considerăm funcțiunea liniară de m variabile $x, y, \dots t$:

$$A_1 x + A_2 y + \dots + A_m t,$$

și ne propunem să determinăm coeficienții $A_1, A_2, \dots A_m$ astfel ca funcțiunea noastră să ia valorile: u_1, pentru $x = x_1$, $y = y_1, \dots t = t_1$; u_2, pentru $x = x_2$, $y = y_2, \dots t = t_2$; $\dots$; u_m, pentru $x = x_m$, $y = y_m, \dots t = t_m$.

Coeficienții $A_1, A_2, \dots A_m$ trebuie deci să satisfacă simultan, condițiile:

$$(1)\quad \begin{cases} A_1 x_1 + A_2 y_1 + \dots + A_m t_1 = u_1 \\ A_1 x_2 + A_2 y_2 + \dots + A_m t_2 = u_2 \\ \dots \\ \dots \\ A_1 x_m + A_2 y_m + \dots + A_m t_m = u_m \end{cases}$$

Avem astfel un sistem de m ecuații cu m necunoscute $A_1, A_2, \dots A_m$.

Deducem ușor:

$$A_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},\quad i = 1, 2, \dots m,$$

unde Δ este determinantul din enunț, iar Δ_i se obține din Δ înlocuind elementele coloanei de rangul i, respectiv prin numerile arbitrare $u_1, u_2, \dots u_m$.

Acum înlocuim în sistemul (1) valorile găsite pentru $A_1, A_2, \dots A_m$ și scăpând de numitor găsim:

$$\begin{cases} \Delta_1 x_1 + \Delta_2 y_1 + \dots + \Delta_m t_1 = u_1 \\ \Delta_1 x_2 + \Delta_2 y_2 + \dots + \Delta_m t_2 = u_2 \\ \dots \\ \dots \\ \Delta_1 x_m + \Delta_2 y_m + \dots + \Delta_m t_m = u_m \end{cases}$$

Adunând aceste relații și folosind notația din enunț: $s_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_m$, $s_2 = y_1 + y_2 + \dots + y_m$, $\dots s_m = t_1 + t_2 + \dots + t_m$, avem:

$$\Delta_1 s_1 + \Delta_2 s_2 + \dots + \Delta_m s_m = (u_1 + u_2 + \dots + u_m)\,\Delta,$$

sau:

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta_i s_i = (u_1 + u_2 + \dots + u_m)\,\Delta,$$

și teorema este astfel stabilită.

Aplicație. In cazul particular când Δ este un determinant oarecare de ordinul al 2-lea, anume:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

iar α, β sunt cantități arbitrare, conform teoremei de mai sus, avem următoarea identitate:

$$(a_1 + b_1)\begin{vmatrix} \alpha & a_2 \\ \beta & b_2 \end{vmatrix} + (a_2 + b_2)\begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix} = (\alpha + \beta)\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

care se poate verifica și direct.

Altă demonstrație. Să considerăm determinantul de ordinul $m+1$.

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \dots & s_m & s \\ x_1 & y_1 & \dots & t_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & \dots & t_2 & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_m & y_m & \dots & t_m & u_m \end{vmatrix},$$

unde :

$$s_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_m,\ s_2 = y_1 + y_2 + \ldots + y_m,$$
$$\ldots s_m = t_1 + t_2 + \ldots + t_m,\ s = u_1 + u_2 + \ldots + u_m.$$

Acest determinant evident că este nul fiindcă elementele liniei întâia având n termeni, determinantul se descompune într'o sumă de m determinanți, toți nuli ca având două linii egale, așa dar avem :

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_m & s \\ x_1 & y_1 & \ldots & t_1 & u_1 \\ x_2 & y_2 & \ldots & t_2 & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & y_m & \ldots & t_m & u_m \end{vmatrix} = 0.$$

Desvoltând acest determinant după elementele primii linii, avem :

$$s_1 \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & t_1 & u_1 \\ y_2 & \ldots & t_2 & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_m & \ldots & t_m & u_m \end{vmatrix} - s_2 \begin{vmatrix} x_1 & \ldots & t_1 & u_1 \\ x_1 & \ldots & t_2 & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & \ldots & t_m & u_m \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{m-1} s_m \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \ldots & u_1 \\ x_2 & y_2 & \ldots & u_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & y_m & \ldots & u_m \end{vmatrix} + (-1)_m s \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \ldots & t_1 \\ x_2 & y_2 & \ldots & t_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & y_m & \ldots & t_m \end{vmatrix} = 0$$

In primul determinant aducem elementele ultimei coloane în locul elementelor primei coloane, avem $m-1$ schimbări de semne ; în al 2-lea determinant aducem elementele ultimei coloane, în locul elementelor coloanei a 2-a, avem $m-2$ schimbări de semne și așa mai departe, penultimul și ultimul determinant rămânând neschimbat. Folosim totodată și notația prescurtată din prima demonstrație pentru determinanții astfel obținuți și avem :

$$(-1)^{m-1} s_1 \Delta_1 - (-1)^{m-2} s_2 \Delta_2 + (-1)^{m-3} s_3 \Delta_3 - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{m-1} s_m \Delta_m + (-1)^m s \Delta = 0.$$

Fie m par sau impar, observăm că toți termenii afară de ultimul au același semn, ultimul având semn contrar, așa că ușor deducem ori cum ar fi m :

$$\Delta_1 s_1 + \Delta_2 s_2 + \ldots + \Delta_m s_m = \Delta s.$$

sau :

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta_i s_i = \Delta s,$$

și teorema este demonstrată.

V. ALACI

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXX, No. 7, Martie 1925. Proprietăți importante ale triunghiului, de *N. Blaha*. Patrate decapitate, de *Emil Ștefănescu*. Paportul comisiunii pentru acordarea premiului de matematici aplicate la științele militare, pe intervalul 1 Septembrie 1923, 1 Septembrie 1924.

2. *Foaia Matematică*, anul II, Martie 1925. Premii pe 1925, (Comitetul). Câteva proprietăți într'un triunghiu, de *Ion C. Vasiliu*. Asupra unor chestiuni de maxim și minim, de *Schächter L. A.*

3. *Curierul Matematic*, vol. I, No. 1, Martie 1925. Este o revistă litografiată apărută sub conducerea d-lor *I. Fântâneanu*, (student, Șc. Polit. București), *N. Botea* și *O. Bolgiu* (elevi cl. VII, lic. Cantemir, București).

Această revistă apare din dorința, *„de a crea o atmosferă continuă, matematică, între studenții de astăzi, — profesorii sau inginerii de mâine — și pătura începătoare a elevilor de liceu"*. Avem cuvinte de laudă pentru astfel de înălțătoare manifestări și dorim sincer realizarea frumosului scop făurit. No. 1, cuprinde: Cuvânt înainte. Proprietăți în legătură cu triunghiurile pedale, de *O. Bolgiu*. Asupru izopolului, de *N. Botea*. Asupra produselor numerilor formate dintr'o sumă de 2 patrate, de *I. Fântâneanu*. Abonamentul 50 lei, a se adresa d-lui *Leon Brüll*, str. Călușei 18, București.

4. *Insemnări Matematice*, anul, I, este o revistă lunară litografiată cu foarte multă îngrijire, scoasă de „Societatea culturală *Luceafărul* a liceului *Gheorghe Barițiu*, din Cluj, pentru a stimula o activitate sănătoasă a elevilor numitului liceu *„are scopul principal de a umple lacunele cunoștințelor necesare, de a desvolta dragostea pentru o*

muncă folositoare, în timpul liber ce-i stă la dispoziția fiecăruia, de a da putința dobândirii unei rutine în calcule, mărginindu-ne deocamdată la chestiuni mai elementare, și în sfârșit de a încuraja pe tinerii colaboratori pentru un progres prielnic prin publicarea în această revistă, a articolelor, observațiunilor originale asupra unei chestiuni din categoria ce ne preocupă".

Aceleași bune urări facem și acestei reviste, foarte bine îngrijită. No. 1, 15 Ianuarie 1925, cuprinde: Cuvânt de introducere (Redacția). Unde de lumină și unde electrice, de Prof. *V. Lațiu*. Asupra unor progresiuni cu mai multe rații, de Prof. *V. Caba*.

No. 2, 15 Februarie 1925, cuprinde: Introduction au calcul tensoriel, de Prof. *H. Jacquier*. Unde de lumină și unde electrice, de Prof. *V. Lațiu* Asupra convexității unei curbe, de *I. Agârbiceanu*.

No. 3, 15 Martie 1925, cuprinde: Introduction au calcul tensoriel, de Prof. *H. Juquier*. Prețul unui exemplar 5 lei. Abonamentele se fac pe adresa: *Angelo Ionescu*, lic. „Gh. Barițiu", Cluj.

5. *P. Sergesco*. Un problème sur la composition des noyaux symétriques. Extras din Buletinul Societății de Științe, din Cluj, Ianuarie 1925.

PROBLEME REZOLVATE

352. — *La numerotarea pietrelor kilometrice dintre două localități s'au întrebuințat 8153 caractere. Știind că numerotarea începe dela 1, se cere distanța între cele două localități.*

SUBLOCOT. I. M. IONITA

Numerotarea pietrelor până la 10 necesită 9 caractere.

Dela 10 la 100, necesită 180 caractere.

Dela 100 la 1000, necesită 2700 caractere.

Deci pentru numerotarea pietrelor până la 999 inclusiv, se întrebuințează 2889. Restul de:

$$8153 - 2889 = 5264 \text{ caractere,}$$

se vor întrebuința pentru numerotarea celorlalte pietre, care necesită fiecare câte 4 caractere.

Putem numerota astfel, încă:

$5264 : 4 = 1316$ pietre kilometrice.

Distanța între cele două localități este:

$$1316 + 999 = 2315, \text{ km.}$$

Soluții date de d-nii: *Ardelea Radu* (Sinaia), *Băncilă Mircea* (lic. Brașov), *Bernardis Berardo* (Șc. Polit. Timișoara), *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Boroș P. Dan*, *Braeșter I. Otto* (lic. Național, Iași), *Brăileanu I. Marin*, *Botea Nicolae* (București), *Bruta Nicolae* (lic. Făgăraș), *Căldăraru Leon* (București), *Călin M. Gheorghe* (lic. Caracal), *Constantinescu C. Marius* (lic. Slatina), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Drăghici Aurelian* (lic. Tg.-Jiu), *Ebner Arthur* (lic. Galați), *Fărcășeanu Gh. Mihail* (lic. R.-Vâlcea), *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *I. N. Georgescu-Val.*, *Ghinicescu I. Gheorghe* (lic. Internat, Iași), *Iochim Grigore* (lic. Milit. Iași), *Grigore Nicolae* (învățător), *Grubemann I. Gr.* (lic. Cantemir, București), *Iacob Șt. Eug.* (Botoșani), *Iliescu Mircea* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu N. Alexandru* (lic. Târgoviște), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu V. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Gh. C-tin* (lic. Tg.-Mureș), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Katz Lazăr* (Botoșani), *Kestést Paut*, *Lateș Vasile* (Sem. Pedag. Iași), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iași), *Marcovici H.* (Botoșani), *Marcovici M. Mauriciu* (lic. Botoșani), *Marini* (student, Cluj), *Maris Marius* (lic. Arad), *Mătăsaru C-tin* (lic. P.-Neamț), *Mătăsaru D.*, *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Miu M. Ioan* (lic. Caracal), *Moașa D-tru* (lic. Brașov), *Moașa Virgil* (lic. Brașov), *Nestor G. D-tru* (București), *Novacu A. C. Valeriu* (lic. Arad), *Pamula Alexandru* (lic. Botoșani), *Partenie Iancu* (lic. Deva), *Petrescu St. Alexandru Dan* (lic. Milit. Craiova), *Placa Mircea* (lic. Botoșani), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Pop Alexandru* (student, Cluj), *Pop Iulian* (Cluj), *Popa Iulian* (lic. Făgăraș), *Podeanu Aurel* (lic. Pitești), *Popescu N. Cornelia* (lic. Giurgiu), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Predescu Nicolae* (lic. Caracal), *Purdilă C-tin* (lic. Brașov), *Pușcă Toma* (lic. Internat, Iași), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Reșnoveanu Emil* (lic. Brașov), *Schächter M. Ozios* (lic. Galați), *Șerban Tiberiu* (abs. de liceu), *Silistrarianu C.* (Ploești), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stern B. Artur* (lic. Craiova), *Stoica N. Aurel* (lic. Cantemir, București), *Stoicescu* (lic. Internat, Iași), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret), București), *Ullea C. Titus* (lic. Internat, Iași), *Văcărescu A. Em.* (lic. Cantemir, București), *Vaida M. Mihail* (lic. Caransebeș), *Welea Gr. Mihail* (lic. Mil. Craiova), *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina) și *Zarda Ion* (lic. Tg.-Jiu).

Au trimes soluții în ultimul timp, d-nii: Frumușelu H. Gheorghe (lic. Brașov), Severin C. Marcel (lic. Botoșani). Teodoru Mircea (Sem. Pedag. Iași) și Țanovici V. C-tin (lic. Ploești).

Altă soluție dată de d-l *Vasiliu N. Șt.* (Iași).

Vom stabili întâi formula care dă numărul cifrelor numerelor dela 1 la un număr dat N de n cifre. Avem de numărat cifrele tuturor numerilor din tabloul:

				1
				2
				.
				.
				9
			1	0
			1	1
			.	.
			.	.
		1	0	0
		.	.	.
		.	.	.
		9	9	9
	1	0	0	0
	.	.	.	.

N

Socotim pe coloane numărul cifrelor. In prima coloană avem: $N=(N+1)-1$ cifre; în a 2-a avem, $N-9=(N+1)-10$ cifre; în a 3-a avem, $N-99=(N+1)-100$ cifre și așa mai departe, în ultima avem:

$$N-\underbrace{99\ldots9}_{(n-1)}=(N+1)-\underbrace{100\ldots0}_{n} \text{ cifre.}$$

In total avem:

$$\begin{aligned}
&(N+1)- \quad 1\\
&(N+1)- \quad 10\\
&(N+1)-100\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&(N+1)n-\underbrace{100\ldots0}_{n}\\
&\overline{(N+1)n-\underbrace{11\ldots1}_{n}}
\end{aligned}$$

Revenim acum la problema noastră.

Având 8153 de caractere, nu putem ajunge să numerotăm decât la un număr de 4 cifre, pentru că dela 1 la 10 avem 9 cifre, dela 10 la 100 avem 180 cifre, dela 100 la 1000 avem 2700 cifre, dela 1000 la 10000 avem 36000 cifre. Așa dar dela 1 la 1000, avem:

$$9+180+2700=2889 \text{ cifre,}$$

iar dela 1 la 10000, avem:

$$9+180+2700+36000=38889 \text{ cifre.}$$

Cu 8153 caractere nu putem dar numerota de cât până la un număr de 4 cifre, deci $n=4$. Atunci ecuația problemei este:

$$(N+1)4-111=8153$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad N=2315.$$

Distanța între cele două localități este de 2315 km.

354. — *Să se verifice identitatea:*

$$\frac{2ac\sqrt[3]{2}}{\sqrt{b^2-4ac}-b}=\sqrt[3]{3abc-b^3-\sqrt{(3abc-b^3)^2-4a^3c^3}}$$

V. ALACI

Prima soluție dată de d-nii: *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Frumușelu H. Gh.* (lic. Brașov), *I. N. Georgescu Val* (Dadilov), *Iliescu Șt. Dima* (lic. Mil. Tg.-Mureș), *Mihailescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Milner I.* (Edinți), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina) și *Purdilă C-tin* (lic. Brașov).

Să însemnăm cu A primul membru, avem succesiv:

$$A=\frac{2ac\sqrt[3]{2}}{\sqrt{b^2-4ac}-b}=\frac{2ac\sqrt[3]{2}\,(\sqrt{b^2-4ac}+b}{-4ac}$$

$$=-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(b+\sqrt{b^2-4ac}).$$

Ridicăm la puterea a 3-a și avem;

$$A^3=-\frac{1}{4}\left[b^3+3b^2\sqrt{b^2-4ac}+3b(b^2-4ac)\right.$$

$$\left.+\sqrt{(b^2-4ac)^3}\right]=-\frac{1}{4}\left[4b^3-12abc\right.$$

$$\left.+\sqrt{b^2-4ac}\,(b^2-4ac+3b^2)\right]$$

$$=3abc-b^3-\sqrt{b^2-4ac\,(b^2-ac)^2}$$

$$=3abc-b^3-\sqrt{b^6-6ab^4c+9a^2b^2c^2-4a^3c^3}$$

$$=3abc-b^3-\sqrt{(3abc-b^3)^2-4a^3c^3}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad A=\sqrt[3]{3abc-b^3-\sqrt{(3abc-b^3)^2-4a^3c^3}}$$

și avem astfel identitatea dată.

Soluția a 2-a. Primul membru al identității date se poate scrie:

$$-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(b+\sqrt{b^2-4ac})$$

cum am văzut în prima soluție, așa că avem de verificat:

$$-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(b+\sqrt{b^2-ac})$$

$$=\sqrt[3]{3abc-b^3-\sqrt{(3abc-b^3)^2-4a^3c^3}}$$

Ridicăm la cub și avem:

$$-\frac{1}{4}\left[b^3+3b^2\sqrt{b^2-4ac}+3b(b^2-4ac)\right.$$

$$\left.+\sqrt{(b^3-4ac)^3}\right]=3abc-b^3+\sqrt{(3abc-b^3)^2-4a^3c^3}$$

Simplificând, găsim:

$$-\frac{1}{4}\sqrt{b^2-4ac}(4b^2-4ac)=\sqrt{(3abc-b^3)^2-4a^3c^3}$$

$$(b^2-4ac)(b^2-ac)^2=b^6-6ab^4c+9a^2b^2c^2-4a^3c^3$$

ceiace se verifică identic.

Soluții date de d-nii: *Aposteanu Ion* (lic. Timișoara), *Ardelea Radu* (lic. Mil. Craiova), *Băncilă Mircea* (lic. Brașov), *Berdan C.* (București), *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov,) *Botea G. Nicolae* (București), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Caracaș I. Gh.* (Botoșani), *Chelaru D-tru* (lic. Roman), *Cogan Alter* (lic. Chișinău), *Corșoreanu Gh. Gheorghe* (Tg.-Jiu), *Dânga G. Vlad* (lic. Orheiu), *Drăgan G.* (lic. Brașov), *Dumitrescu Stelian* (lic. Brașov), *Eleomir, Fărcășanu Gh. Mihail* (lic. R.-Vâlcea), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Frățici I.* (Șc. Polit. Timișoara), *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *Gherbanowsky Nicolae* (lic. Orhei), *Goldstein N.* (Cetatea-Albă), *Grigore I. V.* (lic. Tg.-Jiu), *Grubenmann I. Gr.* (lic. Cantemir, București), *Iacob Șt. Eug.* (Botoșani), *Ianculescu Octavian* (Conductor de mine), *Iliescu St. Virgil* (lic. Tg.-Mureș), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, București), *Ionescu C. Nicolae* (lic. Sf. Sava, București), *Manoil Adolf* (lic. Roman), *Marini Paul* (student, Cluj), *Miu M. Ioan* (lic. Caracal), *Olariu Th. Enea* (Șc. Polit. Timișoara), *Pop Iulian* (Cluj), *Popovici Th. Ion* (București), *Rauchbach Arthur* (lic. Gura-Humorului), *Șerban S. Tiberiu* (Zărnești), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Spârchz Zeno* (Șc. Polit. Timișoara), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Țăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, București), *Ullea C. Tittus* (lic. Internat, Iași), *Vasiliu N. Șt.* (Iași) și *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina).

Au trimes soluții în ultimul timp, d-nii: Grubemann I. Grigore (lic. Cantermir, București) și Tanovici V. C-tin (lic. Ploești).

Observare. Identitatea propusă a fost dedusă, considerând ecuația $ax^2+bx+c=0$ cu rădăcinele x_1, x_2 și cerând să formăm ecuația cu rădăcinele:

$$(1)\qquad X_1=\frac{1}{x_1^3},\quad X_2=\frac{1}{x_2^3},$$

ecuație care am găsit că este:

$$c^3X^2-(3abc-b^3)X+a^3=0.$$

Înlocuind în (1) X_1, x_1; X_2, x_2 cu valorile lor în funcție de coeficienți, găsim două identități iraționale, din care una este cea propusă.

A se vedea și articolul „Identități iraționale" an. IV, No. 9, pag. 124.

358. — *Să se demonstreze că în orice triunghiu avem:*

$$h_a+h_b+h_c>6r.$$

I. MILNER

Relația cunoscută:

$$s=pr=\frac{ah_a}{2}$$

o putem scri:

$$(1)\qquad (a+b+c)r=ah_a.$$

Cum într'un triunghiu: $a<b+c$, egalitatea (1) devine:

$$2ar<ah_a$$

$$h_a>2r.$$

Analog, $h_b>2r$, $h_c>2r$, și deci:

$$h_a+h_b+h_c>6r,$$

ceiace era de dovedit.

Soluții date de d-nii: *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bogdan Cr. Mihail* (Iași), *Brădețeanu C. Cornel* (Craiova), *Brodschi Iulius* (lic. Cetatea-Albă), *Bruda Nicolae* (lic. Făgăraș), *Chinie Mihail* (lic. Pitești), *Coman Onoriu* (lic. Arad), *Dimitrescu A. Mihail* (lic. Roman), *Frumușelu Gh.* (lic. Brașov), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, București), *Ionescu I. Paul, Manoil Adolf* (Roman), *Marius Maris* (lic. Arad), *Mihailescu Tase* (lic Brașov), *Morărescu Aurel* (lic. M-rea Dealu), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Popa Iulian* (lic. Făgăraș), *Popescu Ep.* (lic. Galați), *Rătan S.* (lic. Brașov), *Rauchbach Artur* (lic. Gura Humorului, Bucovina), *Schmautz Al. Gh., Stoica Aureliu* (București), *Teodorescu C. C.* (lic. Tg.-Mureș) și *Vasiliu Gh.* (lic. Timișoara).

Soluția 2-a. Știm că:

$$2p = a + b + c,$$

și folosind inegalitatea: $a < b + c$, avem:

$$2p > 2a, \text{ sau } p > a.$$

Cum din: $s = pr = \frac{a h_a}{2}$, rezultă $p = \frac{a h_a}{2r}$

atunci am:

$$\frac{a h_a}{2r} > a \text{ sau } h_a > 2r.$$

Analog: $h_a > 2r$, $h_c > 2r$,

și deci: $h_a + h_b + h_c > 6r$.

Soluție dată de d-nii: *Bernardis Berardo* (Șc. Polit. Timișoara), *Braeșter Otto* (lic. Național, Iași). *Fratici I.* (Șc. Polit. Timișoara), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Nicolau Gh. C.* (lic. R.-Sărat), *Podeanu Aurel* (lic. Pitești), și *Popa Ilie* (lic. Internat, Iași).

D-nii: *Beju Traian* (lic. Arad), *Scripcă Laur* (lic. Național, Iași), și *Rucăreanu Nicolae* (lic. Brașov), au demonstrat mai general, că:

$$h_a + h_b + h_c > 9r.$$

Din inegalitatea evidentă:

$$(a-b)^2 > 0, \text{ deducem: } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2.$$

Analog: $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} > 2$, $\frac{c}{a} + \frac{a}{c} >$ și deci:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} > 6.$$

Adunând 3 la ambii membri, avem:

$$1 + \frac{b+c}{a} + 1 + \frac{a+c}{b} + 1 + \frac{a+b}{c} > 9.$$

$$\frac{a+b+c}{a} + \frac{a+b+c}{b} + \frac{a+b+c}{c} > 9$$

sau: (1) $\frac{2p}{a} + \frac{2p}{b} + \frac{2p}{c} > 9.$

Dar din relația: $s = pr = \frac{a h_a}{2}$, deducem $\frac{2p}{a} = \frac{h_a}{r}$, analog $\frac{2p}{b} = \frac{h_b}{r}$, $\frac{2p}{r} = \frac{h_c}{r}$, și (1) devine:

$$\frac{h_a}{r} + \frac{h_b}{r} + \frac{h_c}{r} > 9 \text{ sau } h_a + h_b + h_c > 9r,$$

ceiace era de dovedit.

Alte soluții date de d-nii: *Beșchea N.* (lic. Brașov), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Căldăraru Leon* (lic. Șincai, București), *Caracaș I. Gh.* (lic. Botoșani), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Curcubată Dionisie* (lic. Brașov), *Dânga S. Vlad* (lic. Orhei), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dumitrescu Mișu* (lic. Roman), *Dumitrescu Stelian*, *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Dumitrescu Alexandru* (Sem. Pedag. București), *Gârleșteanu Mihail* (Șc. Polit. Timișoara), *Gheorghiu V.* (lic. Tg.-Jiu), *Gherbanowsky F. Nicolae* (lic. Orhei), *Ghinicescu I. Gheorghe*, (lic. Internat, Iași), *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *I. N. Georgescu-Val.* (Dadilov), *Grabovski Eugeniu* (lic. Orbei), *Grigore Nicolae* (Învățător), *Grofșoreanu I. Gheorghe*, *Iacob Șt Eug.* (Botoșani), *Ionescu P. Angelo* (lic. Cluj), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (București), *Iscovici Paul* (Pitești), *Lepădatu I. Victor* (Iași), *Marcovici H.* (lic. Botoșani), *Mareș Grigore* (lic. Bacău), *Marinescu I. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Mihailescu A. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Miu M. Ion* (lic. Caracal), *Neumann Maria* stud., Lugoj), *Pamula Alexandru* (lic. Botoșani), *Placa Mircea* (lic. Botoșani), *Pop Iulian* (Cluj), *Popescu T. Alexandru* (Giurgiu), *Popovici Aurel* (lic. Focșani), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Popovici Mihai* (lic. Internat, Iași), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Rauhbach Artur* (lic. Gura Humorului), *Roșu Al. Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Russu C. Adrian* (lic. Internat, Iași), *Simionescu Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Tăraș Vasile* (Sinaia), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Velea Gr. Mihail* (lic. Mil. Craiova), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov) și *Voiculescu C. Ștefan* (Șc. Polit. Timișoara).

Au trimes soluții în ultimul timp, d-nii; *Costea Octavian* (lic. Brașov), *Cernes A. Mozes* (lic. Național, Iași), *Popa-Petrescu Nic.* (lic. Brașov), *Ullea C. Tittus* (lic. Național, Iași) *Vasilescu* și *B.* (lic. Sf. Sava, București).

394. — *Să se demonstreze că:*

$$(1 - \cos 4\theta)\left(\frac{1}{\operatorname{cotg}^2\theta} + \operatorname{cotg}^2\theta + 2\right) = 8.$$

VOICULESCU ȘTEFAN

Observăm că:

$$1 - \cos 4\theta = 2\sin^2 2\theta = 8\sin^2\theta\cos^2\theta,$$

iar : $\dfrac{1}{\operatorname{cotg}^2\theta} + \operatorname{cotg}^2\theta + 2 = \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} + 2$

$$= \frac{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

Atunci primul membru al identității, se poate scrie succesiv :

$$(1 - \cos 4\theta)\left(\frac{1}{\operatorname{cotg}^2\theta} + \operatorname{cotg}^2\theta + 2\right) = \frac{8\sin^2\theta\cos^2\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta} = 0$$

Identitatea este astfel stabilită.

Soluții date de d-nii : *Băncilă Mircea* (lic. Brașov), *Berdan C.* (București), *Căldăraru Leon* (București), *Chiser C. Marin* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Cocorandu Dan* (Șc. Polit. Timișoara), *Cogan Alter* (lic. Chișinău), *Corșoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Costăchescu N. Ionel* (lic. Brăila), *Costea Octavian* (lic. Brașov), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Dânga G. Vlad* (lic. Orhei), *Dimitrescu A. Mișu* (lic. Roman), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Drăgan G.* (lic. Brașov), *Fezi G. Gh.* (lic. Orhei), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Gherbanowsky Nicolae* (lic. Orhei), *Ghinicescu I. Gheorghe* (lic. Internat, Iași), *Goldstein N.* (Cetatea-Albă), *Iacob St. Eug.* (Botoșani), *Ieremia Petru* (lic. Timișoara), *Grigore T. Vasile* (lic. Tg.-Jiu), *Ionescu Gh. C-tin* (lic. Tg.-Mureș), *Ionescu A. Ștefan* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Ionescu Gh. Stelian* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Jojea Nicolae* (București), *Kertesz Paul* (lic. Arad), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iași), *Manoil A.* (Roman), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Manoil Eugen* (Maior din Artilerie), *Marini Paul* (student, Cluj), *Mihailescu A. C.* (lic. Internat, Iași), *Moașa D-tru* (lic. Brașov), *Moașa Virgil* (lic. Brașov), *Mușta Ștefan* (Cluj), *Neumann Maria* (studentă), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Papadopol C-tin Calimah* (București), *Podeanu Aurel* (lic. Pitești), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Pop Alexandru* (student, Cluj), *Pop Iulian* (Cluj), *Popescu Ep.* (lic. Galați), *Olariu T. Enea* (Șc. Polit. Timișoara), *Popovici Aurel* (lic. Focșani), *Popovici C C-tin* (lic. Internat, Iași), *Popovici Th. Ioan* (Șc. Polit. București), *Purdilă C.* (lic. Brașov). *Pușcă Toma* (lic. Internat, Iași), *Râmniceanu L. Radu* (lic. Tg.-Jiu), *Rătan I.* (lic. Brașov), *Segârceanu D. C-tin* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Șerban I. Tiberiu* (Șc. Polit. București), *Sergheev Ioan* (Șc. Polit. Timișoara), *Spârchez Zeno* (Șc. Polit. Timișoara), *Stamatin I. Mihail* (Șc. Polit. București), *Ștefănescu Emil, Stroescu S. Gheorghe* (lic. Tg.-Mureș), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Tunaru R. Traian* (lic. Carol, Craiova), *Țanovici V. C-tin* (lic. Ploești), *Ulea Titus* (lic. Internat, Iași) și *Zamfirescu Ioan* (lic. Fr. Buzești, Craiova).

Altă soluție. Folosim formula care dă $\cos 4\theta$, în funcție de $\cos\theta$, anume :

$$\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1,$$

atunci :

$$1 - \cos 4\theta = 8(\cos^2\theta - \cos^4\theta).$$

Apoi :

$$\frac{1}{\operatorname{cotg}^2\theta} + \operatorname{cotg}^2\theta + 2 = \frac{1}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)} = \frac{1}{\cos^2\theta - \cos^4\theta}$$

Atunci primul membru al identității, se poate scrie :

$$(1 - \cos 4\theta)\left(\frac{1}{\operatorname{cotg}^2\theta} + \operatorname{cotg}^2\theta + 2\right)$$

$$= \frac{8(\cos^2\theta - \cos^4\theta)}{\cos^2\theta - \cos^4\theta} = 8.$$

Identitatea este astfel stabilită.

Soluții analoage date de d-nii : *Agapescu M. Nicolai* (Sem. Ped. Iași), *Andron Gheorghe* (lic. Brașov), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bernardis N. Berardo* (Șc. Polit. Timișoara), *Blasko Beatrlx* (Lugoj), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Constantinescu N. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Constantinescu C. Marin* (lic. Slatina), *Cosma Z. Gheorghe* (lic. Cantemir, București), *Curcubată Dionisie* (lic. Brașov), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Drăghici C. Aurelian* (lic. Tg.-Jiu), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Frățici I.* (Șc. Polit. Timișoara), *Frumușelu G.* (lic. Brașov), *Gârleșteanu Mihail* (Șc. Polit. Timișoara), *I. N. Georgescu-Val., Gradin I. Gheorghe* (Șc. Polit. Timișoara), *Grigore T. Ioan* (lic. Tg.-Jiu), *Ioachim Grigore* (lic. Milit. Iași), *Ionescu Angelo* (lic. Cluj), *Ivănescu I. Ion* (lic. Carol, Craiova), *Mareș Grigore* (lic. Bacău), *Mihăilescu Tase* (lic. Brașov), *Milner I., Miu M. Ion* (lic. Caracal), *Popper Ervin* (lic. Timișoara), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Brașov), *Rusu Aurel, Scripcă Laur* (lic. Național, Iași), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Staicu Irimie* (București), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov) *Vlădea Ion* (lic. Brașov) și *Zarda Ion* (lic. Tg.-Jiu).

Au trimes soluții în ultimul timp, d-nii: Antistescu Nicolae (lic. Internat, Iași), Beșchea Nicolae (lic. Brașov), Boghiu Iosif (lic. Brașov), Caftangioglu C. (lic R.-Sărat), Caracaș I. Gh. (lic. Botoșani), Dumitrescu Stelian (lic. Brașov), Grabovski Eugeniu (lic. Orhei), Hătăran D. Gh. (lic. Internat, Iași), Ibachim Grigore (lic. Mil. Iași), Ionescu C. Nicolae (lic. Sf. Sava București), Manole Gh. (lic. Brașov), Placa Mircea (lic. Botoșani), Popa-Petrescu Nicolae (lic. Brașov), Popescu Nicu (lic. Fr. Buzești, Craiova), Rădulescu C. Mihail (lic. R.-Sărat), Răpeanu N. Virgil (lic. Internat, Iași), Stern B. Arthur (lic. Carol, Craiova), Stoica N. Aurel (București), Teodoru Mircea (Sem Pedag., Iași), Vasilescu B. (lic. Sf. Sava, București), Vasiliu Gh. Gh. (lic. Timișoara), Velea Gr. Mihail (lic. Craiova) și Vulpanovici Boris (lic. Chișinuu).

Generalizare. D-l *Berdan C.* (București) a stabilit interesanta identitate mai generală ;

$$\prod_{i=0}^{n}(1 - \cos 2^i\theta)(\operatorname{tg}^2 2^i\theta + \operatorname{cotg}^2 2^i\theta + 2) = 2^{3(n+1)}$$

Pentru aceasta observăm că :

$$1 - \cos 2^{i+2}\theta = 2\sin^2 2^{n+1}\theta = 2^3\sin^2 2^n\theta\cos^2 2^n\theta,$$

$$\operatorname{tg} 2^i\theta + \operatorname{cotg}^2 2^i\theta + 2 = \frac{1}{\sin^2 2^i\theta\cos^2 2^i\theta}$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*} \quad (1 - \cos 2^{i+2}\theta)(\operatorname{tg} 2^i\theta + \operatorname{cotg}^2 2^i\theta + 2) = 2^3.$$

Dacă facem succesiv $i = 0, 1, 2, \ldots n$ şi multiplicăm rezultatele obţinem:

$$\prod_{i=0}^{t} (1 - \cos 2^{i+2}\theta)(\operatorname{tg}^2 2^i\theta + \operatorname{cotg}^2 2^i\theta + 2) = 2^{3(n+1)}$$

tocmai identitatea cerută.

Pentru $n = 0$, avem: $(1 - \cos 4\theta)(\operatorname{tg}^2\theta + \operatorname{cotg}^2\theta + 2) = 8$, identitatea propusă.

403.*) — *Trei trenuri pleacă pe rând dintr'o staţie în aceiaşi direcţie, având aceiaşi viteză şi aceleaşi opriri. La un moment dat ele au parcurs următoarele distanţe: primul 180 km., al doilea 135 km. şi al treilea 15 km.*

După câţi km. de mers din acest moment, suma distanţelor (socotite dela staţia de origină) parcurse de ultimele două trenuri este egală cu distanţa parcursă de primul?

SUBLOCOT. I. M. IONITA

Soluţie aritmetică. Trenurile având aceiaşi viteză, e clar că în tot timpul mersului, ele vor păstra aceiaşi dinstanţă între ele. Diferenţa distanţelor parcurse de primele două trenuri va fi de 45 km., chiar şi în momentul când suma distanţelor parcurse de ultimele două trenuri este egală cu distanţa parcursă de primul tren. Această distanţă de 45 km., reprezinlă tocmai distanţa parcursă de ultimul tren în momentul cerut şi cum în momentul la care s'au socotit distanţele ultimul tren avea parcurs 15 km., urmează că egalitatea cerută de enunţ între distanţele parcurse, are loc după 30 km., de mers dela momentul dat în problemă.

Soluţii date de d-nii: *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *I. N. Georgescu-Val* (Şc. Specială Artilerie), *Iacob St. Eug.* (Botosani), *Tigoiu Z. Ioan* (Constanţa) şi *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti).

Soluţie algebrică. Fie x numărul km. ce mai trebuesc parcurse.

Conform enunţului, avem:

$$180 + x = 135 + x + 15 + x$$

$$x = 30 \text{ km.}$$

*) Enunţ complectat.

Soluţii date de d-nii: *Ardelea Radu* [lic. Craiova], *Botea Nicolae* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Călin M. Gh.* [lic. Caracal], *Cernes Mony* [lic. Naţional, Iaşi], *Cojoc Gh., Constantinescu C. Marius* [lic. Slatina], *Constantinescu I. Şt.* [lic. Caracal], *Diaconescu V. Teodor* [lic. Caracal], *Dinescu Florin* [lic. Ploeşti], *Dogan C. Victor* [lic. M-rea Dealu], *Doljian C. Ilie* [lic. Mil. Craiova], *Dragomir Nicolae* [lic. Arad], *Florescu M. Octavian* [lic. Caracal], *Foca I., Gatainţu V. Barbu* [lic. Caracal], *Grigore Nicolae, Grofşoreanu I. Gh.* [lic. Lugoj], *Grubenmann Ionel* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ionescu Th. Andrei Bujor* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ionescu Anton* [lic. Mil. Craiova], *Ionescu Th. C-tin Bujor* [lic. M-rea Dealu], *Ionescu Jean* [lic. Spiru Haret, Bucureşti], *Ionescu Gh. Stelian* [lic. Fr. Buzeşti, Craiova], *Iscovici Paul* [lic. Piteşti], *Mareş Grigore* [lic. Bacău], *Mătăsaru C. C-tin* [lic. Piatra-Neamţ], *Mihăilescu Şt. Nicolae* [lic. Matei-Basarab, Bucureşti], *Milculescu D-tru* [lic. M-rea Dealu], *Milner I., Miu M. Ion* [lic. Caracal], *Moaşa D-tru* [lic. Braşov], *Munteanu I. Gheorghe* [lic. Mil. Craiova], *Novacu A. C. Valeriu* [lic. Arad], *Patriciu V. Aurel* [lic. M-rea Dealu], *Petrescu St. Alex. Dan* [lic. Mil. Craiova], *Pop Iulian* [Cluj], *Popescu I. Alex.* [lic. M-rea Dealu], *Predescu I. Nicolae* [lic. Caracal], *Rotaru N. Barbu* [lic. M-rea Dealu], *Scripcă Valeriu* [Giurgiu], *Spârchez Zeno* [Şc. Polit. Timişoara], *Staicu Irimie* [Bucureşti], *Steriopol D. Ştefan* [lic. Caracal], *Stoica N. Aureliu, Teodorescu N.* [lic. Spiru-Haret, Bucureşti], *Vaida M. Mihail* [lic. Caransebeş], *Velea Gr. Mihail* [lic. Mil. Craiova] şi *Voinescu Ion* [lic. Cantemir, Bucureşti].

Au trimes soluţii în ultimul timp, d-nii: Băncilă Mircea [Braşov], Beşchea Nicolae [lic. Braşov], Bivolaru Nicolae [lic. Tg.-Mureş], Costea Octavian [lic. Braşov], Curcubată Dionisie [lic. Braşov], Gârleşteanu Mihail [Şc. Polit. Timişoara], Foca I., Iliescu St. Dima Şelaru, Nicolau C. Ioan [lic. Mil. Craiova], Pârvu A. [lic. Lazăr, Bucureşti], Placa Mircea [lic. Botoşani], Răpeanu Virgil [lic. Internat, Iaşi], Şerban Aurel [lic. Braşov], Socaciu Nic. [Şc. Polit. Timişoara], Stoian I. [lic. Braşov], Tăraş V. [lic. Braşov], Teodoru C. C. [lic. Tg.-Mureş], Vasiliu Gh. Gh. [lic. Timişoara], Vlădea Ion [lic. Braşov] şi Wetter Anna [lic. Câmpulung, Bucovina].

404. — *p fiind un număr prim, să se arate că $p!$ este divizibil prin:*

$$(p-1) + 2(p-2) + 3(p-3) + \ldots + (p-1)\left[p - (p-1)\right]$$

POPOVICI C-TIN

Observăm că putem scri succesiv:

$$(p-1) + 2(p-2) + 3(p-3) + \ldots + (p-1)\left[p - (p-1)\right]$$

$$= p(1 + 2 + \ldots + p - 1) - \left[1^2 + 2^2 + \ldots + (p-1)^2\right]$$

$$= p\frac{p(p-1)}{2} - \frac{p(p-1)(2p-1)}{6}$$

$$= p(p-1)\left(\frac{p}{2} - \frac{2p-1}{6}\right) = \frac{(p-1)p(p+1)}{6}$$

Numărul, $N = \dfrac{(p-1)(p(p+1)}{6}$ este întreg, pentru că $p-1$, p, $p+1$ fiind trei numere consecutive, unul se divide cu 3, pe de altă parte p fiind prim $\neq 2$, $p+1$ se divide cu 2.

Atunci:

$$N = \frac{p(p-1)\dfrac{p+1}{2}}{3}$$

și unul din factorii întregi p, $p-1$, $\dfrac{p+1}{2}$ se divide cu 3.

Cum factorii întregului N, sunt diferiți dacă p e diferit de 1, 2, 3 și mai mici ca p, urmează că se găsesc printre factorii lui $p!$. Deci dacă p este prim mai mare ca 3, $p!$ se divide cu:

$$(p-1)+2(p-2)+\ldots+(p-1)\left[p-(p-1)\right]$$

Observare. Vedem ușor că e suficient ca p să fie un număr impar, și enunțul problemei se menține.

Soluții date de d-nii: *Anastasiu Th. C-tin* [Giurgiu] *Beșchea G. Nicolae* [lic. Brașov], *Botea G. Nicolae* [lic Cantemir, București], *Dânga S. Vlad* [lic. Orhei], *Dorneanu S. Vasile* [lic. Internat, Iași], *Florescu M. Octavian* [lic. Caracal], *I. N. Georgescu-Val* [Călărași], *Gherbanovsky F. Nicolae* [lic. Orhei], *Goldstein N.* [Cetatea-Albă], *Ionescu Th. Bujor C-tin* [lic. Cantemir, București], *Ioniță M. Ioan* [Sublocot. de Artilerie], *Kertesz Paul, Lepădatu I. Victor* [lic. Internat, Iași], *Maris Marini, Mihailescu A. C.* [lic. Internat, Iași], *Novacu A. C. Valeriu* [lic. Arad], *Râmniceanu L. R.* [lic. Tg.-Jiu], *Stoica N. Aureliu* [lic. Cantemir, București], *Teodorescu N.* [lic. Spiru Haret, București]. *Tăraș Vasile* [lic. Brașov], *Țigoiu Z. Ioan* [Constanța] și *Velea Gr. Mihail* [lic. Mil. Craiova].

Au trimes soluții în ultimul timp, d-nii: Beldie D-tru [R.-Sărat], Braester Otto [lic. Național, Iași], Curcubată Dionisie [Brașov], Diaconu B. Marin [Romanați], Dorneanu S. Vasile [lic. Internat, Iași], Florea C. Alex. [lic. Internat, Iași], Gabrovski Eugeniu [lic. Orhei], Grigore T. Virgil [lic. Tg.-Jiu], Iliescu Șt. Dima-Șelaru, Iliescu Mircea [lic. M-rea Dealu], Mareș Grigore [lic. Bacău], Mihăilescu Emanoil-Joldea [lic. M-rea Dealu], Popescu Nicu [lic. Fr. Buzești, Craiova], Velea Gr. Mihail [lic. Mil., Craiova], Vlădea Ioan [lic. Brașov] și Vulpanovici Boris [lic. Chișinău].

PROBLEME PROPUSE

438. — Să se găsească cel mai mic număr care să fie egal cu de 5 ori produsul cifrelor sale.

SUBLOCOT. I. M. IONITA

439. — Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, astfel ca prima cifră să fie egală cu suma ultimelor două; a doua cifră să fie egală cu a treia; iar numărul format de ultimele două cifre să fie patrat perfect.

ION I. ILIUTA

440. — Fiind date triunghiurile ABC și A_1B_1C de aceiași arie, să se probeze că există în planul lor un punct D astfel ca ariile $DAB = DA_1B_1$, $DAC = DA_1C$, $DBC = DB_1C$ și să se arate că dreptele AA_1 și BB_1, sunt paralele.

N. ABRAMESCU

441. — Fie M punctul în care tangenta în A la cercul O, circumscris triunghiului ABC, întâlnește latura BC. Dreapta MO întâlnește cercul O în punctele B', C' și cercul de diametru OA în punctul M'.

Să se demonstreze că:

$$MM' \cdot M'O = M'B' \cdot M'C' = M'B \cdot M'C.$$

și că dreptele BB', CC', AM' sunt concurente.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

442. — Să se găsească limita expresiunii:

$$E = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+\sqrt{x^8+\ldots+\sqrt{x^{2^n}+\sqrt{x}}}}}} - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^2+\sqrt[4]{x^8+\sqrt[4]{x}}}}$$

ȘTEFAN MUSTA

443. — Să se stabilească identitatea:

$$\begin{vmatrix} \alpha & a_2 & a_3 \\ \beta & b_2 & b_3 \\ \gamma & c_2 & c_3 \end{vmatrix} s_1 + \begin{vmatrix} a_1 & \alpha & a_3 \\ b_1 & \beta & b_3 \\ c_1 & \gamma & c_3 \end{vmatrix} s_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \alpha \\ b_1 & b_2 & \beta \\ c_1 & c_2 & \gamma \end{vmatrix} s_3$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

unde: $s_i = a_i + b_i + c_i$, $i = 1, 2, 3$.

V. ALACI

444. — Un baston fabricat dintr'un material omogen și având mânerul în semicerc este suspendat în capătul mânerului. Să se găsească înclinarea bastonului față de verticală în poziția sa de echilibru.

V. VALCOVICI

INFORMATIUNI

Avem plăcerea a anunța corespondenților noștri că s'au mai înscris și fac parte din comitetul de redacție al R. M. T., următorii:

Ciurceu V., inginer la uzina electrică comunală Timișoara, asistent la Școala Politechnică Timișoara.

Constantinescu Gh., profesor. Piața Elea 18, Craiova.

Otopeanu C., inginer la Fabrica Astra Arad, asistent la Școala Politechnică Timișoara.

Șerbănescu D-tru inginer la Calea ferată Arad-Podgorie, asistent la Școala Politechnică Timișoara.

Magheru I., doctor în științe, profesor de fizică la Școala Politechnică Timișoara.

Butoescu Tr., inginer la Societatea anonimă de electricitate Arad, asistent la Șc. Politechnică Timișoara.

N colau Alex., inginer, profesor la Școala Politechnică Timișoara.

Leonida D., inginer, directorul Societății Energia, profesor la Școala Politechnică Timișoara.

Nicolau Pompiliu, inginer, profesor la Școala Politechnică Timișoara.

Hristea Horațiu, inginer la Depoul de mașini C. F. R. Timișoara, asistent la Școala Politechnică.

ERATĂ

Din cauza câtora greșeli de tipar, și intervertiri de numere la probleme propuse, s'au strecurat greșeli la tabla de materii a volumului IV. Câțiva colaboratori atrăgându-ne atenția asupra lor, dăm aci erata respectivă.

La problema No.	din	în loc de	se va citi
70	142, I	N	40, III
82	174, I	N	54, II
88	174, I	N	51, III
125	46, II	N	121, IV
131	62, II	N	183, II
133	62, II	N	184, II
182	126, II	N	61, III
187	142, II	N	70, III
218	185, II	N	76, III
265	78, III	N	182, III
268	78, III	57, IV	N
270	94, III	11, IV	N
277	110, III	N	57, IV
279	110, III	N	11, IV
290	126, III	N	183, III
291	142, III	N	140, IV

Abonamentul pe anul V-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

60 (ȘASEZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL V. 15 MAI 1925 NO. 3

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 6 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 60 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. GH. CONSTANTINESCU. TEOREME ASUPRA DETERMINANTILOR
2. NOTE MATEMATICE, 3, 4.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 380, 385, 386, 391, 408, 410, 425.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** -profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat 60 lei
Anul III, broșat, 60 lei.

ANUL V. — No. 3. TIMISOARA, 15 MAI 1925

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 6 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 60 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

TEOREME ASUPRA DETERMINANȚILOR[1]

de GH CONSTANTINESCU
profesor Craiova

In No. 1, an. V, al „Revistei", d-l profesor *V. Alaci*, dă demonstrația unei teoreme relativă la determinantul *Vandermonde*.

Imi propun să generalizez teorema și să-i dau altă demonstrație:

Teorema I. Dacă într'un determinant oarecare,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

înlocuim elementele unei coloane sau unei linii cu niște numere arbitrare $u_1, u_2, \dots u_n$ și apoi înmulțim determinatul obținut cu suma elementelor scoase înmulțite respectiv cu alte numere arbitrare $k_1, k_2, \dots k_n$ și facem această operațiune pentru fiecare coloană sau linie, atunci suma produselor astfel obținute este egală cu determinantul Δ înmulțit cu suma $k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots + k_n u_n$, adică:

$$\sum \Delta_i s_i = (k_1 u_1 + k_2 u_2 + \dots + k_n u_n)\Delta,$$

unde Δ_i este determinantul obținut înlocuind în Δ elementele din coloana sau linia de rangul i cu $u_1, u_2, \dots u_n$ și unde, $s_i = k_1 a_{1i} + k_2 a_{2i} + \dots + k_n a_{ni}$.

[1]) Aceste teoreme au fost primite la Redacția „R. M. T.", înainte de a apărea No. 2, dar după ce Nota Matematică din No. 2 a fost culeasă.

Cu determinantul Δ de ordinul n formăm ur mătorul determinant Δ' de ordinul $n+1$:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} -\sum_{i=1}^{n} k_i u_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Se vede ușor că avem:

$$-\sum_{i=1}^{n} k_i u_i \Delta = \Delta'.$$

Inmulțim apoi respectiv liniile 2, 3, ... $n+1$ a lui Δ', cu $k_1, k_2, \dots k_n$ niște numere arbitrare și adunând pe coloane obținem determinantul Δ' pus sub altă formă:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & s_1 & s_2 & \dots & s_n \\ u_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ u_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_n & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Desvoltăm acest determinant după elementele liniei întâia și în fiecare determinant minor, mutăm coloana întâia în locul coloanei care se taie din determinantul Δ', ținând seamă de semne, găsim:

$$\Delta' = -\Delta \sum_{i=1}^{n} k_i u_i = -s_1\Delta_1 - s_2\Delta_2 - \dots - s_n\Delta_n$$

sau:

$$\Delta \sum_{i=1}^{n} k_i u_i = \sum_{i=1}^{n} s_i \Delta_i.$$

Aplicație. In cazul particular când Δ este un determinant de ordinul al 3-lea și $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$, sunt numere arbitrare, conform teoremei de mai sus, găsim:

$$(\alpha\lambda+\mu\beta+\nu\gamma)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (\lambda a_1+\mu a_2+\nu a_3)\begin{vmatrix} \alpha & b_1 & c_1 \\ \beta & b_2 & c_2 \\ \gamma & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (\lambda b_1+\mu b_2+\nu b_3)\begin{vmatrix} a_1 & \alpha & c_1 \\ a_2 & \beta & c_2 \\ a_3 & \gamma & c_3 \end{vmatrix} + (\lambda c_1+\mu c_2+\nu c_3)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha \\ a_2 & b_2 & \beta \\ a_3 & b_3 & \gamma \end{vmatrix}$$

identitate care se poate verifica și direct.

Teorema II. Dacă într'un determinant oarecare:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \ldots \\ \ldots & \ldots \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

înlocuim elementele unei linii cu 1, apoi înmulțim determinantul obținut cu un element oarecare din linia înlocuită și facem această operație pentru toate liniile, cu condițiune ca elementele care înmulțesc acești determinanți să fie toate din aceiași coloană a determinantului Δ, atunci suma produselor astfel obținute este egală cu determinantul Δ, adică:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \Delta'_i.$$

unde Δ'_i este determinantul obținut înlocuind în Δ elementele din linia i cu 1.

In virtutea teoremei I, avem:

$$(1) \qquad \Delta \sum_{i=1}^{n} k_i u_i = \sum_{i=1}^{n} s_i \Delta_i.$$

Să particularizăm acum parametri arbitrari $k_1, k_2, \ldots k_n$ astfel ca:

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 1,$$

ceiace necesită condițiunile simultane:

$$\begin{cases} a_{11} k_1 + a_{21} k_2 + \ldots + a_{n1} k_n = 1 \\ a_{12} k_1 + a_{22} k_2 + \ldots + a_{n2} k_n = 1 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{1n} k_1 + a_{2n} k_2 + \ldots + a_{nn} k_n = 1. \end{cases}$$

Avem un sistem de n ecuații cu n necunoscute $k_1, k_2, \ldots k_n$.

Deducem ușor:

$$k_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{i-1,1} & 1 \ldots a_{n1} \\ a_{12} \ldots a_{i-1,2} & 1 \ldots a_{n2} \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ a_{1n} \ldots a_{i-1,n} & 1 \ldots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} a_{21} \ldots a_{n1} \\ a_{12} a_{22} \ldots a_{n2} \\ \ldots \\ \ldots \\ a_{1n} a_{2n} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} \ldots a_{i-1,n} \\ 1 & 1 \ldots 1 \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta'_i}{\Delta}$$

Inlocuind aceste valori ale lui k_i în (1), găsim:

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} u_i \Delta'_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i.$$

Să particularizăm acum parametri arbitrari u_1, u_2, ... u_n luându-i egali respectivi cu elementele unei coloane k din determinantul Δ, adică:

$$u_1 = a_{1k},\ u_2 = a_{2k},\ \ldots\ u_n = a_{nk},$$

atunci (2) devine:

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,\Delta'_i = \Delta,$$

pentru că $(n-1)$ determinanți din membrul al 2-lea din (2) sunt nuli ca având două coloane identice, iar unul singur se reduce la Δ.

Teorema este astfel demonstrată.

Aplicație. Luând pentru Δ un determinant de ordinul al 2-lea, avem conform teoremei a II-a:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

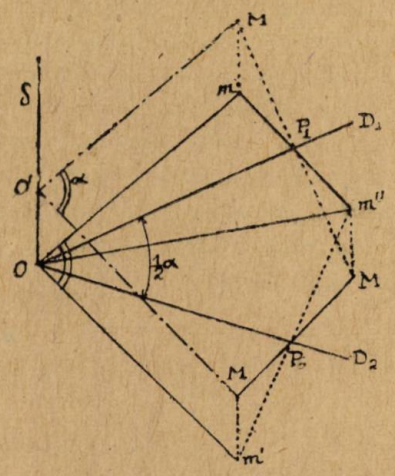
$$= b_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

identitatea care se verifică și direct, imediat.

NOTE MATEMATICE

3. *Asupra înlocuirei unei rotații în jurul unei axe prin două simetrii.* Când se studiază în *Geometria Cinematică* mișcarea cea mai generală a unei figuri invariabile în spațiu, pentru găsirea, în mod pur geometric, a unei elicoidale a mișcărei, este nevoe de înlocuirea unei rotații în jurul unei axe δ prin două simetrii în raport cu două drepte D_1 și D_2 perpendiculare de δ. In cele ce urmează vom da o demonstrație elementară a acestei proprietăți, care este magistral expusă cu ajutorul *Teoriei grupurilor de transformări*, în lucrarea d-lui *M. d'Ocagne*, *Cours de Géométrie pure et appliquée*, t. I, p. 288.

Fie OD_1 și OD_2 două drepte perpendiculare pe axa $O\delta$ și care fac între ele unghiul $D_1OD_2 = \frac{1}{2}\alpha$. M fiind un punct oarecare din spațiu, fie M'' simetricul său în raport cu OD_1 și M' simetricul lui M'' în raport cu OD_2. Să proectăm pe planul D_1OD_2 punctele M, M', M'' în punctele



m, m', m''. Avem $Mm = m''M'' = M'm'$. Luând pe $O\delta$ segmentul $OO' = Mm$, atunci $O'M$ este egală și paralelă cu Om, $O'M'$ egală și paralelă cu Om'; deci unghiurile $MO'M' = mOm'$. Dar, unghiul:

$$mOm' = mOm'' + m''Om' = 2P_1Om'' + 2m''OP_2,$$

$$mOm' = = 2(P_1Om'' + m''OP_2) = 2\frac{\alpha}{2} = \alpha.$$

Deci, unghiul:

$$MO'M' = \alpha, \text{ sau } MO'M' = 2D_1OD_2.$$

Cum $O'M = O'M'$, și cum aceste drepte sunt perpendiculare pe $O\delta$, urmează că punctul M' se obține din M cu o rotație de unghiul α în jurul axei $O\delta$.

Deci, *o rotație de unghiul α în jurul axei $O\delta$ se poate înlocui cu două simetrii succesive în jurul axelor OD_1 și OD_2 perpendiculare pe $O\delta$ și care fac între ele unghiul $\frac{1}{2}\alpha$.*

N. ABRAMESCU

4. *Teoreme asupra determinanților.*

Teorema I. Dacă într'un determinant oarecare:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \ldots & t_1 \\ x_2 & y_2 & \ldots & t_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m & y_m & \ldots & t_m \end{vmatrix},$$

înlocuim elementele unei coloane prin niște numere arbitrare $u_1, u_2, \ldots u_m$, *apoi înmulțim determinantul astfel format cu determinantul de ordinul al 2-lea format cu două din elementele scoase — care fac parte din două linii anumite — și cu elementele arbitrare respective prin care s'au înlocuit și facem această operație pentru fiecare coloană, atunci suma produselor astfel obținute este nulă, adică:*

$$\Delta_1 \begin{vmatrix} x_i & u_i \\ x_j & u_j \end{vmatrix} + \Delta_2 \begin{vmatrix} y_i & u_i \\ y_j & u_j \end{vmatrix} + \ldots + \Delta_m \begin{vmatrix} t_i & u_i \\ t_j & u_j \end{vmatrix} = 0,$$

unde Δ_i $(i = 1, 2, \ldots m)$ *este determinantul obținut, înlocuind în* Δ, *elementele de rangul* i, *prin* $u_1, u_2, \ldots u_m$.

Pentru aceasta considerăm funcțiunea liniară:

$$A_1 x + A_2 y + \ldots + A_m t,$$

și determinăm coeficienții $A_1, A_2, \ldots A_m$ astfel ca funcțiunea, să ia valorile u_1, pentru $x = x_1$, $y = y_1, \ldots t = t_1$; u_2, pentru $x = x_2$, $y = y_2, \ldots$ $t = t_2; \ldots u_m$, pentru $x = x_m, y = y_m, \ldots t = t_m$

Coeficienții $A_1, A_2, \ldots A_m$ trebue deci să satisfacă simultan condițiile:

$$(1) \quad \begin{cases} A_1 x_1 + A_2 y_1 + \ldots + A_m t_1 = u_1 \\ A_1 x_2 + A_2 y_2 + \ldots + A_m t_m = u_2 \\ \cdot \cdot \cdot , \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ A_1 x_m + A_2 y_m + \ldots + A_m t_m = u_m, \end{cases}$$

Din acest sistem de m ecuații, deducem ușor:

$$A_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \ldots m,$$

unde Δ și Δ_i au semnificarea din enunț.

Acum înlocuim în două din ecuațiile (1), valorile găsite pentru $A_1, A_2, \ldots A_m$ și scăpând de numitor găsim:

$$(2) \quad \begin{cases} \Delta_1 x_i + \Delta_2 y_i + \ldots + \Delta_m t_i = u_i \Delta \\ \Delta_1 x_j + \Delta_2 y_j + \ldots + \Delta_m t_j = u_j \Delta, \end{cases}$$

unde i și j sunt unul din numerile $1, 2, \ldots m$.

Dacă în (2) multiplicăm prima relație cu u_j și a 2-a cu u_i și scădem, deducem ușor:

$$(3) \quad \Delta_1 \begin{vmatrix} x_i & u_i \\ x_j & u_j \end{vmatrix} + \Delta_2 \begin{vmatrix} y_i & u_i \\ y_j & u_j \end{vmatrix} + \ldots + \Delta_m \begin{vmatrix} t_i & u_i \\ t_j & u_j \end{vmatrix} = 0,$$

și teorema este astfel demonstrată.

Aplicație. In cazul particular când Δ este un determinant de ordinul al 2-lea, anume:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

iar α, β sunt cantități arbitrare, conform teoremei de mai sus, avem următoarea identitate:

$$\begin{vmatrix} \alpha & a_2 \\ \beta & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & \alpha \\ b_1 & \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \alpha \\ b_1 & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & \alpha \\ b_2 & \beta \end{vmatrix} = 0,$$

care este evidentă.

Consecință. — Dacă în (3) facem $i = 1$, $j = 2, 3, \ldots m$, $i = 2$, $j = 1, 2, \ldots m; \ldots i = m$, $j = 1, 2, \ldots m$, obținem m^2 identități pe care adunându-le găsim:

$$\Delta_1 \sum_{i,j} \begin{vmatrix} x_i & u_i \\ x_j & u_j \end{vmatrix} + \Delta_2 \sum_{i,j} \begin{vmatrix} y_i & u_i \\ y_j & u_j \end{vmatrix} + \ldots + \Delta_m \sum_{i,j} \begin{vmatrix} t_i & u_i \\ t_j & u_j \end{vmatrix} = 0,$$

o identitate mai generală.

Teorema II. Daca Δ_i *este determinantul ce se obține din:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \ldots t_1 \\ x_2 & y_2 \ldots t_2 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ x_m & y_m \ldots t_m \end{vmatrix},$$

înlocuind elementele coloanei de rang i, *prin numerile arbitrare* $u_1, u_2, \ldots u_m$, *atunci avem:*

$$\Delta_1 \begin{vmatrix} \alpha & x_i & u_i \\ \beta & x_j & u_i \\ \gamma & x_k & u_k \end{vmatrix} + \Delta_2 \begin{vmatrix} \alpha & y_i & u_i \\ \beta & y_j & u_j \\ \gamma & y_k & u_k \end{vmatrix} + \ldots + \Delta_m \begin{vmatrix} \alpha & t_i & u_i \\ \beta & t_j & u_j \\ \gamma & t_k & u_k \end{vmatrix} = 0,$$

unde α, β, γ *sunt numere arbitrare, iar* i, j, k *sunt numere din șirul* $1, 2, \ldots m$.

In virtutea teoremei întâia, putem scri:

$$\Delta_1 \begin{vmatrix} x_j & u_i \\ x_k & u_k \end{vmatrix} + \Delta_2 \begin{vmatrix} y_j & u_j \\ y_k & u_k \end{vmatrix} + \ldots + \Delta_m \begin{vmatrix} t_j & u_j \\ t_k & u_k \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_1 \begin{vmatrix} x_i & u_i \\ x_k & u_k \end{vmatrix} + \Delta_2 \begin{vmatrix} y_i & u_i \\ y_k & u_k \end{vmatrix} + \ldots + \Delta_m \begin{vmatrix} t_i & u_i \\ t_k & u_k \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_1 \begin{vmatrix} x_i & u_i \\ x_j & u_k \end{vmatrix} + \Delta_2 \begin{vmatrix} y_i & u_i \\ y_j & u_k \end{vmatrix} + \ldots + \Delta_m \begin{vmatrix} t_i & u_i \\ t_j & u_j \end{vmatrix} = 0.$$

Dacă adunăm aceste egalităţi după ce am înmulţit prima cu α, a 2-a cu β şi a treia cu γ şi observăm că:

$$\alpha \begin{vmatrix} x_j & u_i \\ x_k & u_k \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} x_i & u_i \\ x_k & u_k \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} x_i & u_i \\ x_j & u_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & x_i & u_i \\ \beta & x_j & u_j \\ \gamma & x_k & u_k \end{vmatrix}$$

. . . . . .

$$\alpha \begin{vmatrix} t_j & u_j \\ t_k & u_k \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} t_i & u_i \\ t_k & u_k \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} t_i & u_i \\ t_j & u_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & t_i & u_i \\ \beta & t_j & u_j \\ \gamma & t_k & u_k \end{vmatrix}$$

atunci avem:

$$\Delta_1 \begin{vmatrix} \alpha & x_i & u_i \\ \beta & x_j & u_j \\ \gamma & x_k & u_k \end{vmatrix} + \Delta_2 \begin{vmatrix} \alpha & y_i & u_i \\ \beta & y_j & u_j \\ \gamma & y_k & u_k \end{vmatrix}$$

$$+ \ldots + \Delta_m \begin{vmatrix} \alpha & t_i & u_i \\ \beta & t_j & u_j \\ \gamma & t_k & u_k \end{vmatrix} = 0,$$

şi teorema este demonstrată.

Consecinţă. E clar că putem avea mai general:

$$\Delta_1 \sum_{i,j,k} \begin{vmatrix} \alpha & x_i & u_i \\ \beta & x_j & u_j \\ \gamma & x_k & u_k \end{vmatrix} + \Delta_2 \sum_{i,j,k} \begin{vmatrix} \alpha & y_i & u_i \\ \beta & y_j & u_j \\ \gamma & y_k & u_k \end{vmatrix}$$

$$+ \ldots + \Delta_m \sum_{i,j,k} \begin{vmatrix} \alpha & t_i & u_i \\ \beta & t_j & u_f \\ \gamma & t_k & u_k \end{vmatrix}$$

unde i, j, k sunt numere din şirul $1, 2, \ldots m$.

V ALACI

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Lucrare scrisă, anul I

11 Martie 1925.

Examan partial de Geometrie Analitică

I

Se dă o elipsă cu centrul în O şi un punct oarecare P în planul elipsei. Fie M un punct mobil pe elipsă. Se cere locul geometric al intersecţiei diametrului conjugat lui O M cu perpendiculara dusă din P pe O M.

II

Două elipse E şi E′ au axele comune. Se dă un punct P exterior elipselor. Fie P T, P T_1 tangentele duse din P la elipsa E şi P T′, P T'_1 tangentele duse din P la elipsa E′. Se cere locul intersecţiei dreptei T T_1 cu dreapta T′T'_1 când P se mişcă pe o dreaptă dată Δ.

III

Se dau punctele A şi B pe o parabolă. Prin A se duce normala A M la parabolă. Fie A′ proecţia lui A pe paralela dusă prin B la axa parabolei. Să se arate că M A′ este perpendiculară pe tangenta în B la parabolă.

IV

Se dă o parabolă cu vârful în O şi un punct fix P. Se proectează un punct M de pe parabolă în M′ pe tangenta în vârful parabolei. Se cere locul intersecţiei dreptei O M cu P M′. Discuţie.

BIBLIOGRAFIE

1. *Societatea Română de Ştiinţe.* Buletinul de Ştiinţe Matematice pure şi aplicate, anul XXVI, August-Decembrie 1924, cuprinde: Sur les noyaux symétrisables, par *P. Sergesco.* L'Aproximation des fonctions d'une variable réelle par une classe des sommes trigonométriques, par *V. Alaci.* Asupra axiomei algebrei, de *G. Sudan.* Procesele-Verbale ale şedinţelor „Societăţii Române de Ştiinţe", din 17 Noembrie, 1 şi 15 Decembrie 1924, sub preşedinţia d-lui *G. M. Filipescu.*

2. *Gazeta Matematică,* anul XXX, No. 8, Aprilie 1925. Asupra unei inegalităţi, de *Victor Vâlcovici.* Asupra Sărbătorii Paştelui, de *Maximilian Marcus.*

3. *Foaia Matematică,* anul II-lea, Aprilie 1925. Asupra unei probleme de aritmetică de *Ovidiu G. Popea.* Relaţii între elementele unui triunghiu, de *Mişu A. Dumitrescu.*

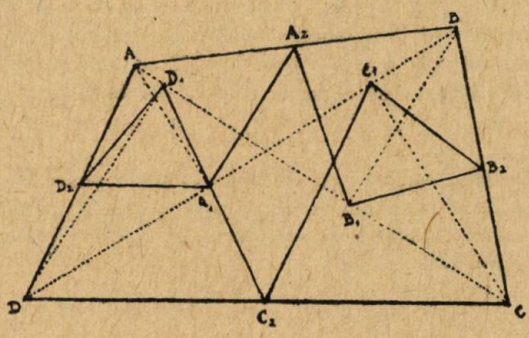
4. *Curierul Matematic,* vol. I, No. 2, Aprilie 1925. Proprietăţi în legătură cu triunghiurile pedale, de *O. Bolgiu.* Asupra izopolului, de *N. Botea.*

5. *Insemnări matematice*, anul I, No. 4, Aprilie 1925. Le calcul tensoriel et la relativité, de Prof. *H. Jacquiert*. Câteva identităţi din analiza combinatorie, de *Angelo Ionescu*. Asupra unor triunghiuri, de *Petru Spacu*, O chestiune de mecanică, de *Iulian Pop*. Asupra problemei lui Viviani, de *Ioan Buga*. Asupra metodei figurilor inverse, de *Ioan Agărbiceanu*.

PROBLEME REZOLVATE

380. — *Se consideră un patrulater* A B C D. *Fie* A_1, C_1, *proecţiile lui* A *şi* C *pe* B D *şi* B_1, D_1 *proecţiile lui* B *şi* D *pe* A C; *fie* A_2, B_2, C_2, D_2 *respectiv mijloacele laturilor* A B, B C, C D *şi* D A. *Să se calculeze perimetrul octogonului* $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2 D_1 D_2$ *în funcţie de perimeirul patrulaterului* A B C D.

NICOLAE GH. BOTEA



Observăm că laturile octogonului: $A_1 A_2$, $A_2 B_1$, $B_1 B_2$, $B_2 C_1$, $C_1 C_2$, $C_2 D_1$, $D_1 D_2$, $D_2 A_1$ sunt mediane în triunghiurile dreptunghice ABA_1, ABB_1, BCB_1, BCC_1, CDD_1, CDC_1, ADA_1, ADD_1, pornind din vârfurile unghiurilor drepte, sunt deci după cele ştiute egale cu jumătate din ipotenuzele corespunzătoare.

Putem deci scri:

$$A_1A_2 + A_2B_1 + B_1B_2 + B_1C_1 + C_1C_2 + C_2D_1 + D_1D_2 + D_2A_1 = \frac{AB}{2} + \frac{AB}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{BC}{2} + \frac{CD}{2} + \frac{CD}{2} + \frac{DA}{2} + \frac{DA}{2} = AB + BC + CD + AD.$$

Perimetrul octogonului este deci egal cu al patrulaterului dat, A B C D.

Soluţii date de d-nii: *Abramescu C-tin* (lic. Craiova), *Agapescu M. Nicolai* (Sem. Pedag. Iaşi). *Ardelea Radu* (Sinaia), *Băncilă Mircea* (lic. Braşov), *Berdan C.* (Bucureşti), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Braeşter Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Constantinescu D. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Drăgan G.* (lic. Braşov), *Dumitrescu Stelian* (lic. Braşov), *Dumitriu Mihai* (lic. M-rea Dealu), *Florea C. Alex.* (lic. Internat, Iaşi), *Franziller N.* (lic. Botoşani), *Frătici I.* (Şc. Polit. Timişoara), *Frumuşelu Gh.* (lic. Braşov), *Golcea Cornel* (student, electro-technică, Bucureşti), *Goldstein N., Gradin I. Gheorghe* (Şc. Polit. Timişoara), *Grubenmann Ionel* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Hătăran D. Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Marcovici H.* (lic. Botoşani), *Morărescu Aurel* (lic. M-rea Dealu), *Musta Ştefan* (Cluj), *Nan Victor* (Şc. Polit. Timişoara), *Neacşu Gh. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Neumann Maria* (Lugoj), *Petrescu Şt. Alex.-Dan* (lic. Mil. Craiova), *Podeanu Aurel* (lic. Piteşti), *Pop Alex.* (student, Cluj), *Pop Iulian* (Cluj), *Popa Ilie* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Mihai* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ioan* (Şc. Polit. Bucureşti), *Râmniceanu L. Radu* (lic. Tg.-Jiu), *Rătan Ioan* (lic. Braşov), *Roşu Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Braşov), *Şerban Tiberiu* (Şc. Polit. Bucureşti), *Scripcă Laur* (lic. Naţional, Iaşi), *Segărceanu C. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Silistrărianu C. C.* (Ploeşti), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Spârchez Zeno* (Şc. Polit. Timişoara), *Stănciulescu Dan* (lic. M-rea Dealu), *Stănescu D. Teodoru* (lic. M-rea Dealu), *Ştefănescu Emil* (Bucureşti), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Stroescu I. Gh.* (lic. Tg.-Mureş), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Ulea C. Titus* (lic. Internat, Iaşi), *Vasiliu H. Şt.*, *Velea Mihail* (lic. Craiova). *Vlădea Ioan* (lic. Braşov) şi *Wallechner Emil* (Govora).

In ultimul timp s'a primit o soluţie dela d-l: Lepădatu V. (lic. Internat, Iaşi).

Generalizare dată de d-nii: *Constantinescu D. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti) şi *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti).

Se dă poligonul A B C, . . . L *de n laturi. Fie* B_1, C_1, . . . L_1, A_1 *proecţiile punctelor* B_1 C, . . . L, A *respectiv pe diagonalele* A C, B D, . . . L B, *iar* A_2, B_2, C_2 . . . L_2 *mijloacele dreptelor* A B, B C, . . . L A. *Să se arate că perimetrul poligonului stelat* $A_1A_2B_1B_2, \ldots L_1L_2$ *este egal cu al poligonului dat* A B C, . . . L.

Demonstraţie analoagă.

385. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\sum_{k=1}^{11}\left(\sec^6\frac{k\pi}{24} + \operatorname{cosec}^6\frac{k\pi}{24}\right) = 411924\,\frac{20}{27}$$

PINCU KATZ

Soluții date de d-nii: *Berdan C.* (București), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Corșoreanu Gh. Gheorghe* (Tg.-Jiu), *Podeanu Aurel* (lic. Pitești), *Popovici Aurel* (lic. Focșani) și *Vlădea Ioan* (lic. Brașov).

Observăm că putem scrie succesiv:

$$\sec^6\alpha+\operatorname{cosec}^6\alpha=\frac{1}{\cos^6\alpha}+\frac{1}{\sin^6\alpha}=\frac{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha}{\sin^6\alpha\cos^6\alpha}$$

$$=2^6\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}{\sin^6 2\alpha}$$

$$=2^4\frac{4-3\sin^2 2\alpha}{\sin^6 2\alpha}=2^4\frac{1+3\cos^2 2\alpha}{\sin^6 2\alpha}$$

Pentru $\alpha=\frac{\pi}{24},\ \frac{2\pi}{24},\ \ldots\ \frac{11\pi}{24}$, avem succesiv:

$$\sec^6\frac{\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{\pi}{24}=2^4\frac{1+3\cos^2 15^0}{\sin^6 15^0}$$

$$=2^8\frac{10+3\sqrt{3}}{26-15\sqrt{3}}=2^8(395+228\sqrt{3})$$

$$\sec^6\frac{2\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{2\pi}{24}=2^4\frac{1+3\cos^2 30^0}{\sin^6 30^0}=2^8\cdot 13$$

$$\sec^6\frac{3\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{3\pi}{24}=2^4\frac{1+3\cos^2 45^0}{\sin^6 45^0}=2^6\cdot 5$$

$$\sec^6\frac{4\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{4\pi}{24}=2^4\frac{1+3\cos^2 60^0}{\sin^6 60^0}=\frac{2^8\cdot 7}{27}$$

$$\sec^6\frac{5\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{5\pi}{24}=2^4\frac{1+3\cos^4 75^0}{\sin^6 75^0}$$

$$=2^4\frac{10-3\sqrt{3}}{26+15\sqrt{3}}=2^8(395-228\sqrt{3})$$

$$\sec^6\frac{6\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{6\pi}{24}=2^4\frac{1+3\cos^2 90^0}{\sin^6 90^0}=2^4.$$

$$\sec^6\frac{7\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{7\pi}{24}=\sec^6\frac{5\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{5\pi}{24}$$

$$=2^8(395-228\sqrt{3})$$

$$\sec^6\frac{8\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{8\pi}{24}=\sec^6\frac{4\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{4\pi}{24}=\frac{2^8\cdot 7}{27}$$

$$\sec^6\frac{9\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{9\pi}{24}=\sec^6\frac{3\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{3\pi}{24}=2^6\cdot 5$$

$$\sec^6\frac{10\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{10\pi}{24}=\sec^6\frac{2\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{2\pi}{24}=2^8\cdot 13$$

$$\sec^6\frac{11\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{11\pi}{24}=\sec^6\frac{\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{\pi}{24}$$

$$=2^8(395+228\sqrt{3}).$$

Adunând aceste egalități, avem:

$$\sum_{k=1}^{11}\left(\sec^6\frac{k\pi}{24}+\operatorname{cosec}^6\frac{k\pi}{24}\right)=2^{10}\cdot 395+2^9\cdot 13$$

$$+2^7\cdot 5+\frac{2^9\cdot 7}{27}+2^4=2^9\times 803+2^4\times 41+132\frac{20}{27}$$

$$411136+656+132\frac{20}{27}=411924\frac{20}{27},$$

tocmai identitatea cerută.

386. — *Să se găsească un număr de două cifre astfel ca scriindu-l de două ori alături și punând la urmă cifra 1, numărul de cinci cifre format să fie un patrat perfect.*

BERNARDIS BERARDO

Dacă însemnăm cu a și b cifra unităților și zecilor numărului cerut, iar cu N^2 patratul format, avem succesiv:

$$N^2=ababl=ab\times 1000+ab\times 10+1=ab\times 1010+1$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad N^2-1=ab\times 101\times 10,$$

sau: $$(N+1)(N-1)=ab\times 101\times 10.$$

Factorul 101 fiind prim, el trebuie să dividă neapărat pe unul din factorii primului membru, putem deci scrie:

$$N\pm 1=101\,k,$$

$$\overset{*}{*}\overset{*}{*}\quad N=101\,k\mp 1.$$

Cum prin enunț N^2 are cinci cifre, rezultă că:

$$100\leqslant N<317,$$

și deci k nu poate lua de cât valorile 1, 2, sau 3.

De altă parte N^2 terminându-se cu 1, N se va termina cu 1 sau 9. Cu atari restricțiuni k nu poate fi 1, nici 3, deci $k=2$, în care caz avem numai:

$$N=202-1=201,$$

al cărui patrat este 40401. Numărul cerut este deci 40.

Soluții găsite prin multe încercări, de d-nii; *Andron Gh.* (lic. Brașov), *Ardelea Radu* (lic. Milit. Craiova), *Avramescu T. Ioan* (lic. Caracal), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Berdan C.* (București), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Bey M. Gheorghe* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Boroș P. Dan* (lic. Internat, Iași), *Botea N.* (lic. Cantemir, București), *Braeșter Otto* (lic. Național, Iași), *Brăileanu I. Marin* (Caracal), *Brüll Leon* (lic. Cantemir, București), *Caracaș I. Gh.* (lic. Botoșani), *Căldăraru Leon* (București), *Comănescu Al.-Bălteni*, *Constantinescu D. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Cristescu C. Ioan* (lic. Șincai, București), *Curcubată Dionisie* (lic. Brașov), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Diaconu Gh.*, *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dimitrescu A. Mișu* (lic. Roman), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Ebner Arthur* (lic. Galați), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Gataiantu V. Barbu* (lic. Caracal), *I. N. Georgescu-Val.*, *Ghelber Mauriciu* (Semin. Pedag., București), *Grabowski Eugeniu* (lic. Orheiu), *Grubenmann I. Gr.* (lic. Cantemir, București), *Iacob St. Eug.* (Botoșani), *Iliescu St. Virgil* (lic. Tg.-Mureș), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Gh. C-tin* (lic. Tg.-Mureș), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Istinie I. C-tin* (lic. Caracal), *Iunghaus R. Gheorghe* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Katz L.* (Botoșani), *Kestesz Paul* (lic. Arad), *Kirilă I. Bocancea* (lic. Tg.-Mureș), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Manoil Adolf* (lic. Roman), *Marcovici M. Mauriciu* (lic. Botoșani), *Marini Paul* (student, Cluj), *Maris Marius* (lic. Arad), *Mihăilescu St. Nicolae* (lic. Matei-Basarab, București), *Miu M. Ion* (lic. Caracal), *Neacșu Gh. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu) *Nedelescu Damian* (lic. Caracal), *Nestor Gh. D-tru* (București), *Neumann Maria* (Lugoj), *Nicolau G. C.* (lic. R.-Sărat), *Păunescu G. Petre* (lic. Caracal), *Petrescu St. Alex.-Dan* (lic. Milit. Craiova), *Podeanu Aurel* (Pitești), *Popescu Spirea* (lic. M-rea Dealu), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici Th. Ioan* (Șc. Polit., București), *Popovici Th. Mihai* (lic. Internat, Iași), *Predescu I. Nicolae* (lic. Caracal), *Purdilă C-tin* (lic. Brașov), *Rădulescu Nicolae* (lic. Caracal), *Popeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Riven M.* (Tg.-Neamț), *Roșu Al. Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Rusu Liviu* (lic. Blaj), *Șerban Tiberiu* (Șc. Polit., București), *Stănescu V. Teodoru* (lic. M-rea Dealu), *Ștefănescu Emil* (București), *Sobel Mircea* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Socaciu N.* (Șc. Polit., Timișoara), *Spârchez Zeno* (Șc. Polit., Timișoara), *Stănescu I. Aurel* (lic. M-rea Dealu), *Stoica Aurel* (lic. Cantemir, București), *Stoica S. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Stoicescu Theodor* (lic. Internat, Iași), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Tanovici V. C-tin*, *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timișoara), *Vasiliu Gh. Nicolae* (lic. Focșani), *Velea Gr. Mihail* (lic. Craiova), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov) și *Zamfirescu Ion* (lic. Fr. Buzești, Craiova).

391.* — *Dacă:*

$$\beta = c\alpha^2 - b\alpha + a,$$

atunci avem identitatea:

$$(2\alpha\beta + 2c\alpha - b)^2 - 4\beta\left[\beta\alpha^2 + (2c\alpha - b)\alpha + c\right] \equiv b^2 - 4ac$$

V. ALACI

Insemnând cu A primul membru, și efectuând dezvoltările și reducerile necesare, avem succesiv:

$$A = 4\alpha^2\beta^2 + 4c^2\alpha^2 + b^2 + 8c\alpha^2\beta - 4\alpha\beta b$$
$$- 4c\alpha b - 4\beta^2\alpha^2 - 8\beta c\alpha^2 + 4\beta\alpha b - 4\beta c$$
$$= 4c^2\alpha^2 + b^2 - 4c\alpha b - 4\beta c.$$

Inlocuind pe β prin valoarea sa dată, obținem;

$$A = 4c^2\alpha^2 + b^2 - 4c\alpha b - 4c^2\alpha^2$$
$$+ 4b\alpha c - 4ac = b^2 - 4ac,$$

și identitatea dată este astfel stabilită.

1

Soluții date de d-nii: *Agapescu M. Nicolae* (Seminaru Pedag. București), *Anastasiu P. Vasile* (lic. Botoșani), *Andron Gheorghe* (lic. Brașov), *Antistescu Nicolai* (lic. Internat, Iași), *Antoniu Simion* (lic. M-rea Dealu), *Aposteanu Ioan* (lic. Timișoara), *Aposteanu Vasile* (lic. Timișoara), *Apostoliu C. Ioan* (lic. Șincai, București), *Ardelea Radu* (lic. Mil. Craiova), *Babeș Alexandru* (lic. Internat, Iași), *Băncilă Mircea* (lic. Brașov), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Berdan C.* (București), *Bernardis Berardo* (Șc. Polit., Timișoara), *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Boghiu Iosif* (lic. Brașov), *Fey M. Gheorghe* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Braeșter Otto* (lic. Național, Iași), *Brăileanu M.* (Caracal). *Bruda Nicolae* (lic. Făgăraș), *Caftangioglu C. C.* (lic. R.-Sărat), *Caracaș I. Gh.* (lic. Botoșani), *Căldăraru Leon* (București), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Cernes Mony* (lic. Național, Iași), *Chinie Mihail* (lic. Pitești), *Cocorandu Dan* (lic. Brașov), *Comănescu Al.-Bălteni*, *Constantinescu V. Alexandru* (lic. Tg.-Mureș), *Constantinescu D. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Constantinescu G. Gheorghe* (lic. Craiova), *Constantinescu C. Marin* (lic. Slatina), *Constantinidi Radu* (Roman), *Corșoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Cosma Z. Gheorghe* (lic. Cantemir, București), *Costăchescu N. Ionel* (lic. Brăila), *Costea Octavian* (lic. Brașov), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Curcubată Dionisie* (lic. Brașov), *Dânga G. Vlad* (lic. Orheiu), *Diaconescu T.* (lic. Caracal), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dimitrescu Mișu* (lic. Roman), *Dimitriu Mihai* (lic. M-rea Dealu), *Dogan C. Victor* (lic. M-rea Dealu), *Dorneanu S. V.* (lic. Internat, Iași), *Drăgan G.* (lic. Brașov), *Drăghici C. Aurelian* (Tg.-Jiu), *Dumitrescu Gh. Ioan* (lic. Caracal), *Eleomir*, *Ebner Arthur* (lic.

Galati), *Fezi E. Gh.* (lic. Orheiu), *Florea V. Gheorghe* (lic. Craiova), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Frătici I.* (Şc. Polit. Timişoara), *Frumuşelu Gh.* (lic. Braşov), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Gavrilescu Ioan* (lic. Ploeşti), *Gârleşteanu Mihail* (Şc. Polit., Timişoara), *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *I. N. Georgescu-Val.*, *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Piteşti), *Gherbanowscky Nicolae* (lic. Orheiu), *Ghinicescu I. Gh.* (lic. Internat. Iaşi), *Giurgiu H. G.*, *Goldstein N.* (Cetatea-Albă), *Gorgiu G. V.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Gradin I.Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Grigore T. Ioan* (Tg.-Jiu), *Grigore Nicolae* (Învăţător, Ialomiţa), *Grigore T. Virgil* (lic. Tg.-Jiu), *Grofşoreanu I. Gheorghe* (lic. Lugoj), *Grozăvescu D-tru* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Grozăvescu Gr. Petre* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Grubenmann Ionel* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Hărătan Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Iacob St. Eug.* (lic. Botoşani), *Ianculescu Octavian* (Conductor de Mine), *Ieremia Petru* (lic. Timişoara), *Iliescu Şt. Virgil* (lic. Tg.-Jiu), *Ioachim Grigore* (lic. Milit. Iaşi), *Ionescu Th. Andrei-Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Angelo* (Cluj), *Ionescu Th. C-tin-Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu C. Nicolae* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Ionescu Gh. Stelian* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Iscovici I. Paul* (lic. Piteşti), *Istinie I. C-tin* (lic. Caracal), *Iunghaus R. Gheorghe* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Jicman I. Nicolae* (lic. Tg.-Mureş), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Manoilă Adolf* (Roman), *Manoil Eugen* (Maior de Artilerie), *Marcovici H.* (lic. Botoşani), *Marini Paul* (student, Cluj), *Mihăilescu P. Marin* (lic. Lugoj), *Mihailescu Tase* (lic. Braşov), *Milner I. Miu I. Ioan* (lic. Caracal), *Morărescu Aurel* (lic. M-rea Dealu), *Musta Ştefan* (Cluj), *Neacşu Vasile* (lic. Braşov), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Neumann Maria* (Lugoj), *Nicolau C.* (R.-Sărat), *Niculescu Alexandru* (lic. Tg.-Mureş), *Niculescu S. Victor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Noica I.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Oana Ioan* (lic. Făgăraş), *Olaru T. Enea* (Şc. Polit. Timişoara), *Păunescu G. Petre* (lic. Caracal), *Petrescu St. Alex.-Dan* (lic. Milit. Craiova), *Piperiu A. Nicuşor* (lic. Internat, Iaşi), *Placa Mircea* (lic. Botoşani), *Podeanu P. Aurel* (lic. Piteşti), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Pop Alexandru* (student, Cluj), *Pop Iulian* (Cluj), *Popa Ilie* (lic. Internat, Iaşi), *Popa Petrescu Nicolae* (lic. Braşov), *Popescu I. Al.* (lic. M-rea Dealu), *Popescu Dem. Marin* (lic. Giurgiu), *Popescu Spirea* (lic. M-rea Dealu), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat. Iaşi), *Popovici Th. Ioan* (Student, Bucureşti), *Popovici Th. Theodor* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popper Ervin* (lic. Timişoara), *Predescu I. Nicolae* (lic. Caracal), *Purdilă C-tin* (lic. Braşov), *Puşcă I. Toma* (lic. Internat, Iaşi), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Rădulescu Nicolae* (lic. Caracal), *Râmniceanu L. Radu* (lic. Tg.-Jiu), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Rătan I.* (lic. Braşov), *Roşu Al. Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Braşov), *Rusanda Gheorghe* (lic. Arad), *Russu C. Adrian* (lic. Internat, Iaşi), *Rusu Liviu* (lic. Blaj), *Schmautz O. Al. Gh.* (Roman), *Scripcă Laur* (lic. Internat, Iaşi), *Şerban I. Tib.* (Şc. Polit. Bucureşti), *Silistrărianu C. C.* (Ploeşti), *Sobel Mircea* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Spârchez Zeno* (Şc. Polit. Timişoara), *Staicu Irimie* (Şc. Super. de Agricultură, Bucureşti), *Stamatiu I. Mihail* (Şc. Polit., Bucureşti), *Stănciulescu Dan* (lic. M-rea Dealu), *Stănescu I. Aurel* (lic. M-rea Dealu), *Stănescu Teodoru V.* (lic. M-rea Dealu), *Stern B. Arthur* (lic. Carol, Craiova), *Ştefănescu Emil* (Bucureşti), *Stoian I.* (lic. Braşov), *Stoica N. Aureliu* (Bucureşti), *Stroescu I. Gheorghe* (lic. Tg.-Mureş), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ţanovici V. C-tin* (lic. Ploeşti), *Ullea Titus* (lic. Internat, Iaşi), *Văcăreanu A. Eug.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Timişoara), *Vasiliu A. St.*, *Velea Gr. Mihail* (lic. Craiova), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov), *Voinescu D. Ioan* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Zamfirescu Ioan* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova) şi *Zardă Ion* (Tg.-Jiu).

In ultimul timp s'au primit soluţii dela d-nii: Chirilă Ion (lic. Internat, Iaşi), Katz Kazăr (lic. Botoşani), Mareş A. şi Stroescu I. Gheorghe.

408. — *Ecuaţia:* $x^2 - px + q = 0$, *admite ca rădăcini pe* $\operatorname{tg}\alpha$ *şi* $\operatorname{tg}\beta$. *Să se formeze ecuaţia care admite ca rădăcini pe* $\sin\alpha$ *şi* $\sin\beta$.

EMIL ŞTEFANESCU

Folosim relaţiile:

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \quad \sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}},$$

şi avem:

$$(1)\quad \sin\alpha+\sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\beta}+\operatorname{tg}\beta\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)}} = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\beta)+\operatorname{tg}^2\beta(1+\operatorname{tg}^2\alpha)+2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)}}}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)}}$$

$$= \frac{\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^2-2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^2+1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(2-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}}}{\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^2+1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(2-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}}$$

$$(2)\quad \sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{\sqrt{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^2+1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(2-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}}$$

Privind ecuaţia dată şi rădăcinele ei putem însă scrie:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta = p,\quad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = q,$$

şi atunci relaţiile (1) şi (2) devin:

$$\sin\alpha+\sin\beta = \frac{\sqrt{p^2-2q[1-q-\sqrt{p^2+1-q(2-q)}]}}{\sqrt{p^2+1-q(2-q)}}$$

$$= \frac{\sqrt{p^2+2q(q-1)+2q\sqrt{p^2+(q-1)^2}}}{\sqrt{p^2+(q-1)^2}}$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{q}{\sqrt{p^2+(q-1)^2}}$$

Având suma şi produsul rădăcinelor ecuaţiei cerute, ea este:

$$x^2 - \frac{\sqrt{p^2+2q(q-1)+2q\sqrt{p^2+(q-1)^2}}}{\sqrt{p^2+(q-1)^2}}x + \frac{q}{\sqrt{p^2+(q-1)^2}} = 0.$$

Soluţii date de d-nii: *Aposteanu Gh. Ion* [lic. Timişoara], *Ardelea Radu* [lic. Milit., Craiova], *Cernes Mony* [lic. Naţional, Iaşi], *Chiser P. Marin* [lic. Fr. Buzeşti, Craiova], *I. N. Georgescu-Val.* [Sublocot. de Artilerie], *Gherbanowsky F. Nicolae* [lic. Orheiu], *Goldstein N.* [Cetatea-Albă], *Gradin I. Gheorghe* [Şc. Polit. Timişoara], *Grofşoreanu I. Gheorghe* [lic. Lugoj], *Ioachim Grigore* [lic. Clu]], *Ionescu Angelo* [lic. Cluj], *Kestesz Paul* [lic. Arad], *Manoil Eugeniu* [Maior din Artilerie], *Mihăilescu St. Niculae* [lic. Matei-Basarab, Bucureşti], *Nicolau C.* [lic. R.-Sărat], *Wilhelm Pasco* [Bucureşti], *Pop Iulian* [Cluj], *Popovici Aurel* [lic. Focşani], *Râmniceanu L. Radu* [lic. Tg.-Jiu], *Spacu Gh. Petru* [Cluj], *Stamatiu I. Mihail, Ţanovici V. C-tin* [lic. Ploeşti], *Tăraş Vasile* [lic. Braşov], *Velea Gr. Mihail* [Craiova], *Vlădea Ioan* [lic. Braşov] şi *Vulpanovici Boris* [lic. Chişinău].

In ultimul timp s'au primit soluţii dela d-nii: Beju Traian (Arad), Fraţii Ioan (Şc. Polit, Timişoară), Popovici Dan Puiu (Chişinău), Stoica I. D-tru (lic. R.-Sărat), Teodorescu N. (lic. Spiru Haret, Bucureşti) şi Vasiliu Gh. Gheorghe (lic. Timişoara).

410. — *Să se demonstreze că oricare ar fi triunghiul* A B C, *expresiunea:*

$$E = \frac{r}{p}\left[\frac{r_a r_b (a+b)}{ab(h_a+h_b)} + \frac{r_b r_c (b+c)}{bc(h_b+h_c)} + \frac{r_c r_a (c+a)}{ca(h_c+h_a)}\right],$$

păstrează o valoare constantă.

CIORANESCU I. C-TIN

Folosind relaţiile cunoscute:

$$r_a = \frac{s}{p-a},\quad r_b = \frac{s}{p-b},\quad h_a = \frac{2s}{a},\quad h_b = \frac{2s}{b},$$

putem scri:

$$\frac{r_a r_b (a+b)}{ab(h_a+h_b)} = \frac{s^2(a+b)ab}{2sab(p-a)(p-c)(a+b)} = \frac{s}{2(p-a)(p-b)}$$

Analog avem:

$$\frac{r_b r_c (b+c)}{bc(h_b+h_c)} = \frac{s}{2(p-b)(p-c)},$$

$$\frac{r_c r_a (c+a)}{ca(h_c+h_a)} = \frac{s}{2(p-c)(p-a)}.$$

Inlocuind aceste valori în expresia dată, avem:

$$E = \frac{r}{p}\left[\frac{s}{2(p-a)(p-b)} + \frac{s}{2(p-b)(p-c)} + \frac{s}{2(p-c)(p-a)}\right] = \frac{rs(p-a+p-b+p-c)}{2p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \frac{rsp}{2s^2} = \frac{rp}{2s} = \frac{1}{2},$$

fiindcă ştim că:

$$p(p-a)(p-b)(p-c) = s^2 \quad \text{şi} \quad rp = s.$$

Aşa dar:

$$E = \frac{1}{2} = \text{constant}.$$

Soluţie dată de d-nii: *Beldie N. D-tru* [lic. R.-Sărat], *Beşchea Nicolae* [lic. Braşov], *Boghiu Iosif* [lic. Braşov], *Braeşter Otto* [lic. Naţional, Iaşi], *Caftangioglu C. C.* [lic. R.-Sărat], *Caracaş I. Gh.* [lic. Botoşani], *Cerneş A. M.* [lic. Naţional, Iaşi], *Corşoreanu Gh. Gheorghe* [lic. Tg.-Jiu], *Costea Octavian* [lic. Braşov], *Curcubată Dionisie* [lic. Braşov], *Dânga S. Vlad* [lic. Orheiu], *Dumitrescu Mişu* [lic. Roman], *Dorneanu S. Vasile* [lic. Internat, Iaşi], *Dumitrescu Stelian* [lic. Braşov], *Eleomir Florea C. Alex.* [lic. Internat, Iaşi], *Fraţici Ioan* [Şc. Polit. Timişoara], *Frumuşelu Gh.* [lic. Braşov], *Gataianţu V. Barbu* [lic. Caracal], *Gârleşteanu Mihail* [Şc. Polit. Timişoara], *Georgescu I. Jean* [lic. M-rea Dealu], *I. N. Georgescu-Val.* [Timişoara], *Ghelber M.* [Sem. Pedag., Bucureşti], *Grabovski Eugeniu* [lic. Orheiu], *Gradin I. Gheorghe* [Şc. Polit. Timişoara], *Handjieff V.* [Şc. Polit. Timişoara], *Ianculescu Octavian* [Conductor de Mine], *Iliescu Şt. Dima-Şelaru, Ioachim Grigore* [lic. Milit., Iaşi], *Ionescu Angelo* [lic. Cluj], *Ioniţă I. M.* [Sublocotenent de Artilerie], *Iscovici Paul* [lic. Piteşti], *Lepădatu I. Victor* [lic. Internat, Iaşi], *Manafu Valeriu* [lic. M-rea Dealu], *Manoil Adolf* [Roman], *Marcovici H.* [lic. Botoşani], *Mareş Grigore* [lic. Bacău], *Maris Marius, Mihailescu A C.* [lic. Internat, Iaşi], *Mihailescu Tasse* [lic. Braşov], *Nicolau C.* [lic. R.-Sărat], *Novacu A. C. Valeriu* [lic. Arad], *Olariu T. Enea* [Şc. Polit. Timişoara], *Petrescu M. Ioan* [lic. Fr. Buzeşti, Craiova], *Pop Iulian* [Cluj], *Popescu I. Alexandru* [Giurgiu], *Popescu Theodor* [lic. Giurgiu], *Popovici Aurel* [lic. Focşani], *Popovici Dan Puiu* [Chişinău], *Puşca Toma* [lic. Internat, Iaşi], *Rădulescu C. Mihail* [lic. R.-Sărat], *Râmniceanu L. Radu* [Tg.-Jiu], *Răpeanu Virgil* [lic. Internat, Iaşi], *Rătan I.* [lic. Braşov], *Rucăreanu Nicolae* [lic. Braşov], *Rusanda Gheorghe* [lic. Arad], *Scripcă C. Laur* [lic. Naţional, Iaşi], *Scripcă Valentin* [Giurgiu], *Spârchez Zeno* [Şc. Polit. Timişoara], *Staicu Irimie* [Şc. Super. de Agricultura, Bucureşti], *Stamatiu Mihail* [Şc. Polit., Bucureşti], *Stoica I. D-tru* [lic. R.-Sărat], *Tăraş Vasile* [lic. Braşov], *Teodorescu N.* [lic. Spiru Haret, Bucureşti], *Ţanovici V. C-tin* [lic. Ploeşti], *Ulea Titus* [lic. Internat, Iaşi], *Vasilescu Bartolomeu* [lic. Sf. Sava, Bucureşti], *Velea Gr. Mihail* [lic. Milit., Craiova], *Vlădea Ioan* şi *Vulpanovici Boris* [lic. Chişinău].

Altă soluție. În virtutea relațiilor cunoscute:

$$h_a = \frac{2s}{a},\quad h_b = \frac{2s}{b},\quad h_c = \frac{2s}{c},$$

avem:

$$E = \frac{r}{p}\sum \frac{r_a r_b (a+b)}{ab(h_a+h_b)} = \frac{r}{p}\sum \frac{r_a r_b (a+b)\,ab}{2s\,.\,ab(a+b)}$$

$$= \frac{r}{2ps}\sum r_a r_b.$$

Cum: $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$, rezultă:

$$E = \frac{p^2 r}{2ps} = \frac{ps}{2ps} = \frac{1}{2} = \text{constant.}$$

Soluții analoage date de d-nii: *Botea G. Nicolae* [lic. Cantemir, București], *Diaconescu V. Teodor* [lic. Caracal], *Florescu M. Octavian* [lic. Caracal], *Grigore T. Vir.* [lic. Tg.-Jiu], *Iacob St. Eugen* [Botoșani], *Placa Mircea* [lic. Botoșani], *Spacu Gh. Petru* [Cluj] și *Vasiliu Gh. Gheorghe* [lic. Timișoara].

Alte soluții date de d-nii: *Băncilă Mircea* [Brașov], *Pop Iulian* [Cluj], *Popovici C. C-tin* [lic. Internat, Iași] și *Stoica N. Aurel* [lic. Cantemir, București].

În ultimul timp s'au primit soluții dela d-nii: Ardelea Radu (lic. Milit. Craiova), Beju Tr. (Arad) și Drăghici Aurelian (Tg.-Jiu).

425. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} \dfrac{xyz}{ayz+bxz+cxy} = d \\ \dfrac{xyt}{ayt+bxt+dxy} = c \\ \dfrac{xzt}{azt+cxt+dxz} = b \\ \dfrac{yzt}{bzt+cyt+dyz} = a \end{cases}$$

SUBLOCOT. I. N. GEORGESCU-VAL

Inversând ambii membri ai ecuațiilor sistemului, putem scri:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z} = \dfrac{1}{d} \\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{d}{t} = \dfrac{1}{c} \\ \dfrac{a}{x}+\dfrac{c}{z}+\dfrac{d}{t} = \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z}+\dfrac{d}{t} = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

Adunând și împărțind cu 3, găsim:

$$(2)\quad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}+\frac{d}{t} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

Scăzând din această ecuație, prima ecuație a sistemului (1), avem:

$$\frac{d}{t} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{2}{d}\right)$$

$$= \frac{bcd+acd+abd-2abc}{3abcd}$$

$$\overset{*}{**}\quad t = \frac{3abcd^2}{bcd+acd+abd-2abc}$$

În mod analog scăzând din (2) pe rând și celelalte ecuații a sistemului (1), deducem:

$$x = \frac{3a^2bcd}{acd+abd+abc-2bcd}$$

$$y = \frac{3ab^2cd}{bcd+abd+abc-2acd}$$

$$z = \frac{3abc^3d}{bcd+acd+abc-2abd}$$

Soluții date de d-nii: *Băncilă Mircea* (lic. Brașov), *Beldie D-tru* (R.-Sărat), *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Braester Otto* (lic. Național, Iași), *Caftangioglu C. C-tin* (lic. R.-Sărat), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Costea Octavian* (lic. Brașov), *Curcubată Dionisie* (lic. Brașov), *Drăgan G.* (lic. Brașov), *Frumușelu H. Gheorghe* (lic. Brașov), *Ghelber M.* (Semn. Pedag. București), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Iliescu Șt. Dima-Șelaru*, *Ioachim Grigore* (lic. Milit. Iași), *Ionescu Angelo* (lic. Cluj), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, București), *Kestesz P.*, *Mareș Grigore* (lic. Bacău), *Manole Gheorghe* (lic. Brașov), *Maris Marius*, *Munteanu I. Gheorghe* (lic. Mil. Craiova), *Neacșu Vasile* (lic. Brașov), *Niculescu Emanuel* (lic. Milit. Craiova), *Olariu Enea* (Șc. Polit. Timișoara), *Pop Alexandru* (student, Cluj), *Pop Iulian* (Cluj), *Popa-Petrescu Nicolae* (lic. Brașov), *Popovici Aurel* (lic. Focșani), *Purdilă C-tin* (lic. Brașov), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Rătan I.* (lic.

Brașov), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Brașov), *Șerban Aurel* (lic. Brașov), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Stoica N. Aureliu* (București), *Stoica S. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Tunaru R. Traian* (lic. Carol, Craiova), *Țanovici V. C-tin*, *Țigoiu I.* (Șc. Comert, Constanța), *Ulea C. Titus* (lic. Internat, Iași), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Timișoara) și *Velea Mihail* (lic. Milit. Craiova).

Observare. D-nii: *Kestesz P.*, *Popovici Aurel*, *Stoica Aurel*, *Tăraș Vasile* și *Teodorescu N.*, au generalizat problema, în sensul că au considerat un sistem analog însă cu n necunoscute.

PROBLEME PROPUSE

445. — Să se găsească numerile patrate perfecte de forma $\overline{aa}$, unde a este un număr oarecare.

GH. CONSTANTINESCU

446. — Scriind înaintea unui patrat perfect de două cifre $\overline{cd}$ un număr prim de două cifre $\overline{ab}$, astfel ca suma cifrelor sale să fie un patrat sau un cub perfect, se obține un număr prim. Care este acel număr?

GH. GH. VASILIU

447. — Se dă triunghiul ABC. Să se construiască: 1°. un paralelogram KLMN având K și L pe AB, M pe AC, N pe BC și știind că diagonalele sunt perpendiculare pe BC și AC; 2°. un romb cu aceiași poziție a vârfurilor, având o diagonală perpendiculară pe BC sau AC.

P. TROFINOV

448. — In triunghiul ABC perpendiculara ridicată în B pe BC, tae latura AC în D așa fel ca: $2AD = AC$. Să se arate că în acest caz laturile triunghiului dat sunt legate între ele prin relația: $3(\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2) = \overline{BC}^2$ sau $3\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2$.

ION PROTOPOPESCU

449. — Fie AB și AC respectiv o coardă și un diametru al aceluiași cerc O, M un punct pe AB, D piciorul perpendicularei lăsate din M pe AC și E una din intersecțiile dreptei MD cu cercul O. Să se arate că cercurile DCE și BEM sunt tangente.

V. VALCOVICI

450. — Să se arate că:

$$(a+b+c+\ldots+l)! > (a+1)!(b+1)!\ldots(l+1)!$$

CAP. I. LINTES

451. — Să se stabilească identitatea:

$$\begin{vmatrix} \alpha & b_1 & c_1 \\ \beta & b_2 & c_2 \\ \gamma & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & \alpha \\ a_2 & \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \alpha & c_1 \\ a_2 & \beta & c_2 \\ a_3 & \gamma & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & \alpha \\ b_2 & \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha \\ a_2 & b_2 & \beta \\ a_3 & b_3 & \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & \alpha \\ c_2 & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

V. ALACI

452. — Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2\left[x^2+2(3y^2+2xy-4)\right]+y^2\left[y^2+2(2xy-4\right]=16(xy-1) \\ \dfrac{2y+6-x}{y} - \dfrac{y+6}{x} = \dfrac{9}{xy} \end{cases}$$

VASILIEV ILIE

453. — Să se discute ecuația:

$$x^3 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 x + \alpha = 0,$$

α fiind un parametru oarecare.

N. CIORANESCU

454. — In orice triunghiu există relația:

$$\sum r_a(r_b - r_c)^2 + 8ps = 4Rp^2,$$

notațiile fiind cele obicinuite.

GEORGESCU JEAN

INFORMATIUNI

Vineri 8 Mai, a avut loc în amfiteatrul noului pavilion al Şcoalei Politechnice din Timişoara, şedinţa Societăţii Ştiinţifice a Şcoalei Politechnice, sub preşedenţia d-lui *V. Vâlcovici*

D-l *V. Alaci*, desvoltă două comunicări tratând, în prima, două teoreme asupra determinanţilor ducând la nişte identităţi interesante. In a doua deduce identităţile lui Euler din desvoltarea unor determinanţi Vandermonde, generalizându-le şi deducând şi alte identităţi numai pe căile elementare. O parte din aceste comunicări vor apărea şi în R. M. T.

D-l *I. Magheru*, face o comunicare asupra metodei Strioscopice întrebuinţată în fizică pentru a arăta neomogenitatea unui material transparent. Comunicarea e însoţită de o experienţă interesantă în care se arată propagarea sunetului în aer, propagare făcută vizibilă prin vederea undelor care produc răriri şi concentrări ale straturilor de aer, neomogenităţi ce se observă cu ajutorul acestei metode.

Aducem la cunoştinţa corespondenţilor că cererile de numere răzlețe ne descompletează colecţia şi ne aduc perderi însemnate. Rugăm deci pe toţi ca să-şi arate adresa exactă cu stradă şi număr. Mulţi care dau adresa la liceu reclamă numere care s'au trimis, dar probabil s'au perdut la liceu. In fine mulţi care schimbându-şi adresa nu anunţă, şi pe urmă cer numere care li s'au trimes la vechea adresă.

Trebue să se ştie că expediţia se verifică totdeauna, şi că primim chiar înapoiate de poştă numere din cauza adreselor insuficiente sau neexacte, aşa că ne vom vedea siliţi să nu mai trimetem numere perdute, decât eventual la finele anului după legarea colecţiilor.

Rugăm de asemenea pe corespondenţii care ne scriu cerând diverse lămuriri, să adaoge mărci sau carte poştală pentru răspuns, pentru a nu ne încărca cheltuelile cu corespondenţa.

Direcţiunea generală p. t. t., a înfinţat în ţară încă din anii trecuţi 6 şcoli elementare pentru pregătirea acelora ce doresc să intre în administraţia poştelor. Candidaţii având patru clase sau opt clase urmează această şcoală *în comun*, timp de 9 luni după care sunt repartizaţi la serviciu, primii cu gradul de impiegaţi cu salariul de 2065 lei, iar ai doilea cu gradul de asistenţi cu salariul de 2451 lei.

Cursurile ce se fac privesc numai specialitatea strictă aşa că sunt tot aşa de necesare pentru un absolvent a patru clase ca şi pentru unul a opt clase. Ele se referă la exploatarea poştală, telegrafică şi telefonică, cunoşterea tarifelor, a legilor şi regulamentelor, geografia poştală, serviciul oficiilor de stat şi ambulanţelor, cunoaşterea aparatelor telegrafice şi telefonice, noţiuni de electrotechnică, manipularea aparatelor Morse şi Hughes.

Inscrierile se primesc începând din luna August la Secretariatul şcoalei p. t. t. din Timişoara unde se pot cere oricând informaţiuni despre actele necesare, condiţiilor de admitere, etc.

Asemenea şcoli sunt în ţară la Bucureşti, Chişinău, Roman, Cernăuţi, Oradea-Mare, Timişoara, ultimele două având internat. In aceste două din urmă întreţinerea elevilor este gratuită primind mâncare, locuinţă, bae, spălat, lucruri de scris, şi o indemnizaţie de îmbrăcăminte de 2000 lei. In celelalte şcoli elevii sunt externi primind un salariu de 2065 lei lunar. Aceasta în schimbul unui angajament de a servi în administraţia poştelor 6 ani după terminarea şcolii.

După terminarea şcolii elevii cu patru clase au dreptul la stagiu militar redus, şi în general după 6 luni sunt repartizaţi la serviciu de poştă militară până la împlinirea termenului de 1 an, sau vărsaţi Administraţiei poştelor în serviciul obicinuit. Ceilalţi se bucură de avantajele acordate tirilor cu termen redus.

Faţă de greutăţile materiale ce le întâmpină părinţii pentru educaţia copiilor se impune ca fiecare tânăr să-şi asigure cât mai degrabă existenţa. Un absolvent a patru clase, muncitor şi care vede cu ce greutate i-ar putea asigura părinţii continuarea studiilor, făcându-şi carieră în Administraţia poştelor va putea să uşureze această sarcină căştigându-şi existenţa independent. Dacă este un element bun va putea să-şi prepare examenele în particular, şi dacă va avea îndemânare în serviciu va putea fi repartizat unui oficiu din un oraş putând să-şi dea examenele,

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL V. 15 IUNIE 1925 No. 4

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 6 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 60 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI. ASUPRA IDENTITATII LUI EULER.
2. NOTE MATEMATICE, 5.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 340, 342, 372, 387, 416, 431.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci** —profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat, 60 lei
Anul III, broșat, 60 lei
Anul IV, broșat, 60 lei.

ANUL V. — No. 4. TIMISOARA, 15 IUNIE 1925

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 6 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 60 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

ASUPRA IDENTITAȚILOR LUI EULER

de V. ALACI

Aceste identități obicinuit se deduc din formulele de interpolare ale lui *Lagrange*. Imi propun în cele ce urmează să arăt cum le putem obține folosind numai cunoștinți din teoria Determinanților.

Totodată vom stabili și alte identități analoage. Incepem prin cazuri particulare.

1. Să considerăm determinantul:

$$\begin{vmatrix} a^k & b^k & c^k \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0, \text{ pentru } k = 0,\ 1,$$

ca având două linii egale. Dezvoltând primul membru, avem:

$$a^k(c-b) + b^k(a-c) + c^k(b-a) = 0.$$

Impărțind cu $(a-b)(a-c)(b-c)$, deducem:

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^k}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^k}{(c-a)(c-b)} = 0.$$

Dacă aici luăm $k=0$ și $k=1$, obținem:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} = 0$$

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = 0,$$

două din identitățile lui *Euler*.

2. Să considerăm determinantul:

$$\begin{vmatrix} a^k & b^k & c^k & d^k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} = 0, \text{ pentru } k = 0,\ 1,\ 2,$$

ca având două linii egale. Dezvoltând primul membru, avem:

$$a^k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix} - b^k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c & d \\ a^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}$$

$$+ c^k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{vmatrix} - d^k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0,$$

sau:

$$a^k(c-b)(d-b)(d-c) - b^k(c-a)(d-a)(d-c)$$
$$+ c^k(b-a)(d-a)(d-b) - d^k(b-a)(c-a)(c-b)$$

Impărțind cu:

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d),$$

deducem:

$$\frac{a^k}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^k}{(b-a)(b-c)(b-d)}$$
$$\frac{c^k}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^k}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0.$$

Dacă luăm $k=0,\ 1,\ 2$, obținem:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)}$$
$$+ \frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0,$$

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)(b-d)}$$
$$+ \frac{c}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d}{(d-a)(d-b)(d-c)} = 0,$$

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)(b-d)}$$

$$+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)}=0,$$

încă trei din identităţile lui *Euler*.

3. Să considerăm mai general, determinantul:

$$\begin{vmatrix} a_0^k & a_1^k & a_2^k \ldots a_m^k \\ 1 & 1 & 1 \ldots 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \ldots a_m \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 \ldots a_m^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^{m-1} & a_1^{m-1} & a_2^{m-1} \ldots a_m^{m-1} \end{vmatrix}=0,$$

pentru $k=0, 1, 2, \ldots m-1,$

ca având două linii egale. Dezvoltând primul membru, avem:

$$a_0^k\begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots 1 \\ a_1 & a_2 \ldots a_m \\ \ldots & \ldots \\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} \ldots a_m^{m-1} \end{vmatrix}-a_1^k\begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots 1 \\ a_0 & a_2 \ldots a_m \\ \ldots & \ldots \\ a_0^{m-1} & a_2^{m-1} \ldots a_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

$$+\ldots+(-1)^m a_m^k\begin{vmatrix} 1 & 1 \ldots 1 \\ a_0 & a_1 \ldots a_{m-1} \\ \ldots & \ldots \\ a_0^m & a_1^{m-1} \ldots a_{m-1}^{m-1} \end{vmatrix}=0,$$

sau:

$$a_0^k(a_2-a_1)\ldots(a_m-a_1)(a_3-a_2)\ldots(a_m-a_2)\ldots(a_m-a_{m-1})-$$

$$a_1^k(a_2-a_0)\ldots(a_m-a_0)(a_3-a_2)\ldots(a_m-a_2)\ldots(a_m-a_{m-1})+$$

$$\ldots+(-1)^m(a_1-a_0)\ldots(a_{m-1}-a_0)(a_2-a_1)\ldots$$

$$(a_{m-1}-a_1)\ldots(a_{m-1}-a_{m-2})=0.$$

Impărţind cu: $(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots(a_0-a_m)(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_m)\ldots(a_m-a_{m-1})$, deducem:

$$\frac{a_0^k}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots(a_0-a_m)}+$$

$$\frac{a_1^k}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_m)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{a_m^k}{(a_m-a_0)(a_m-a_1)\ldots(a_m-a_{m-1})}=0,$$

care cuprinde m identităţi ale lui *Euler*, fiindcă putem lua $k=0, 1, 2, \ldots m-1$.

4. Dacă luăm un polinom $f(x)$ de gradul $m-1$ cel mult:

$$f(x)=A_0x^{m-1}+A_1x^{m-2}+\ldots+A_{m-1},$$

şi considerăm determinantul:

$$\begin{vmatrix} f(a_0) & f(a_1) & f(a_2) \ldots f(a_m) \\ 1 & 1 & 1 \ldots\ldots 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \ldots\ldots a_m \\ a_0^2 & a_1^2 & a_2^2 \ldots\ldots a_m^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0^{m-1} & a_1^{m-1} & a_2^{m-1} \ldots\ldots a_m^{m-1} \end{vmatrix}=0,$$

pentru $k=0, 1, 2, \ldots m-1,$

fiindcă acest determinant se descompune în o sumă de determinanţi, care au fiecare câte două linii proporţionale.

Procedând ca în cazul 3, găsim:

$$\frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)\ldots(a_0-a_m)}+$$

$$\frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)\ldots(a_1-a_m)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{f(a_m)}{(a_m-a_0)(a_m-a_1)\ldots(a_m-a_{m-1})}=0,$$

o identitate *Euler* mai generală, care le cuprinde pe celelalte.

Vom stabili acum şi alte identităţi analoage, prin aceiaşi metodă.

5. Să considerăm determinantul:

$$\begin{vmatrix} a_k & b_k & c_k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0, \text{ pentru } k=1, 2,$$

ca având două linii egale. Dezvoltând primul membru, avem:

$$a_k(b_1c_2-b_2c_1)+b_k(a_2c_1-a_1c_2)+c_k(a_1b_2-a_2b_1)=0.$$

Impărţind cu produsul,

$$(b_1 c_2 - b_2 c_1)(a_2 c_1 - a_1 c_2)(a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

obţinem :

$$\frac{a_k}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_2 c_1 - a_1 c_2)} + \frac{b_k}{(b_1 c_2 - b_2 c_1)(b_2 c_1 - b_1 a_2)} + \frac{c_k}{(c_1 a_2 - c_2 a_1)(c_2 b_1 - c_1 b_2)} = 0.$$

Avem astfel două identităţi, luând $k=1$ şi $k=2$.

6. Să considerăm determinantul de ordinul m :

$$\begin{vmatrix} a_k & b_k & c_k \ldots l_k \\ a_1 & b_1 & c_1 \ldots l_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \ldots l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m-1} & b_{m-1} & c_{m-1} \ldots l_{m-1} \end{vmatrix} = 0,$$

pentru $k = 1, 2, 3, \ldots m-1,$

ca având două linii egale. Dezvoltând primul membru după elementele liniei întâiu şi notând cu Δ_1, $\Delta_2, \ldots \Delta_m$ determinanţii minori respectivi corespunzători lui a_k, $b_k, \ldots l_k$, avem :

$$a_k \Delta_1 - b_k \Delta_2 + c_k \Delta_3 - \ldots + (-1)^{m-1} l_k \Delta_m = 0.$$

Impărţind cu produsul $\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_m$ presupus $\neq 0$, avem :

$$\frac{a_k}{\Delta_2 \Delta_3 \ldots \Delta_m} - \frac{b_k}{\Delta_1 \Delta_3 \ldots \Delta_m} + \frac{c_k}{\Delta_1 \Delta_2 \Delta_4 \ldots \Delta_m} - \ldots + (-1)^{m-1} \frac{l_k}{\Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_{m-1}} = 0,$$

care cuprinde m identităţi analoage cu ale lui *Euler*, luând $k = 1, 2, 3, \ldots m-1$. Folosind aceiaşi metodă pentru determinanţi de forme particulare, putem deduce unele identităţi interesante.

7. Să considerăm în particular, determinantul :

$$\begin{vmatrix} a^k & b^k & c^k & d^k \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = 0, \text{ pentru } k = 0, 1, 3,$$

ca având două linii egale. Dezvoltând primul membru, deducem :

$$a^k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} - b^k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c & d \\ a^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} + c^k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^3 & b^3 & d^3 \end{vmatrix} - d^k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0,$$

sau :

$$a^k (b+c+d)(c-b)(d-b)(d-c) - b^k (a+c+d)(c-a)(d-a)(d-c) + c^k (a+b+d)(b-a)(d-a)(d-b) - d^k (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b) = 0.$$

Impărţind cu, $(b+c+d)(a+c+d)(a+b+d) \times (a+b+c)(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$, deducem :

$$\frac{a^k}{(a+c+d)(a+b+d)(a+b+c)(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^k}{(b+c+d)(a+b+d)(a+b+c)(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^k}{(b+c+d)(a+c+d)(a+b+c)(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{c^k}{(b+c+d)(a+c+d)(a+b+d)(d-a)(d-b)(d-c)} = 0,$$

care cuprind trei identităţi interesante, luând $k = 0, 1, 3$.

Avem deci o metodă simplă, uniformă, pentru a obţine oricâte identităţi analoage.

NOTE MATEMATICE

5. *Teoremă. Dacă într'un determinant oarecare de ordinul m :*

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \ldots t_1 \\ x_2 & y_2 \ldots t_2 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_m & y_m \ldots t_m \end{vmatrix}$$

înlocuim elementele unei coloane prin niște numere arbitrare $u_1, u_2, \ldots u_m$, *apoi înmulțim determinantul astfel format cu un determinant tot de ordinul* m, *ale cărui prime* $m-2$ *coloane sunt cantități absolut arbitrare, iar ultimele două coloane sunt formate din elementele scoase și elementele prin care s'au înlocuit, și facem această operație pentru fiecare coloană, atunci suma produselor astfel obținute este nulă, adică:*

$$\Delta_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots l_1 & x_1 & u_1 \\ a_2 & b_2 \ldots l_2 & x_2 & u_2 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m & b_m \ldots l_m & x_m & u_m \end{vmatrix} + \Delta_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots y_1 & u_1 \\ a_2 & b_2 \ldots y_2 & u_2 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_m & b_m \ldots y_m & u_m \end{vmatrix}$$

$$+ \ldots + \Delta_m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots t_1 & u_1 \\ a_2 & b_2 \ldots t_2 & u_2 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ a_m & b_m \ldots t_m & u_m \end{vmatrix} = 0,$$

unde Δ_i $(i = 1, 2, \ldots m)$ *este determinantul obținut înlocuind în* Δ *elementele de rangul* i, *prin* $u_1, u_2, \ldots u_m$.

Folosim metoda inducțiunei complecte, presupunem adică că înmulțind determinanții $\Delta_1, \Delta_1, \ldots \Delta_m$ care au semnificarea de mai sus, cu niște determinanți de ordinul i, care au primele lor $i-2$ coloane absolut arbitrare, penultima și ultima coloană fiind formate cu i din elementele scoase și acelea prin care s'au înlocuit, suma produselor obținute este nulă și admițând aceasta vom demonstra că enunțul acesta e adevărat și pentru $i+1$ $(i < m-1)$.

Admitem prin urmare că avem:

$$(1)\ \Delta_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots k_1 & x_a & u_a \\ a_2 & b_2 \ldots k_2 & x_b & u_b \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ a_i & b_i \ldots k_i & x_k & u_k \end{vmatrix} + \Delta_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots k_1 & y_a & u_a \\ a_2 & b_2 \ldots k_2 & y_b & u_b \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ a_i & b_i \ldots k_i & y_k & u_k \end{vmatrix}$$

$$+ \ldots + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots k_1 & t_a & u_a \\ a_2 & b_2 \ldots k_2 & t_b & u_b \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ a_i & b_i \ldots k_i & t_k & u_k \end{vmatrix} = 0,$$

și voim să dovedim că și:

$$(2)\ \Delta_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots . k_1 & l_1 & x_a & u_a \\ a_2 & b_2 \ldots . k_2 & l_2 & x_b & u_b \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_i & b_i \ldots . k_i & l_i & x_k & u_k \\ a_{i+1} & b_{i+1} \ldots k_{i+1} & l_{i+1} & x_l & u_l \end{vmatrix}$$

$$+ \ldots . + \Delta_m \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots . k_1 & l_1 & t_a & u_a \\ a_2 & b_2 \ldots . k_2 & l_2 & t_b & u_b \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_i & b_i \ldots . k_i & l_i & t_k & u_k \\ a_{i+1} & b_{i+1} \ldots k_{i+1} & l_{i+1} & t_l & u_l \end{vmatrix} = 0,$$

unde $a, b, \ldots k, l$ sunt $i+1$ numere oarecare din șirul $1, 2, \ldots m$.

In adevăr, în virtutea teoremei, admise, exprimată prin egalitatea (1), putem scrie:

$$\Delta_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \ldots . k_2 & x_b & u_b \\ a_3 & b_3 \ldots . k_3 & & \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ a_i & b_i \ldots . k_i & x_k & u_k \\ a_{i+1} & b_{i+1} \ldots k_{i+1} & x_l & u_l \end{vmatrix}$$

$$+ \ldots + \Delta_m \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \ldots . k_2 & t_a & u_a \\ a_3 & b_3 \ldots . k_3 & & \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ a_i & b_i \ldots . k_i & t_k & u_k \\ a_{i+1} & b_{i+1} \ldots k_{i+1} & t_l & u_l \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_1 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \ldots . k_1 & x_a & u_a \\ a_3 & b_3 \ldots . k_3 & & \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot & \cdot \\ a_i & b_i \ldots . k_i & x_k & u_k \\ a_{i+1} & b_{i+1} \ldots k_{i+1} & x_l & u_l \end{vmatrix}$$

$$+\ldots+\Delta_m\begin{vmatrix} a_1 & b_1\ldots\ldots k_1 & t_a & u_a \\ a_3 & b_3\ldots\ldots k_3 & & \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & & \\ a_i & b_i\ldots\ldots k_i & t_k & u_k \\ a_{i+1} & b_{i+1}\ldots k_{i+1} & t_l & u_l \end{vmatrix}=0$$

$$\Delta_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1\ldots k_1 & x_a & u_a \\ a_2 & b_2\ldots k_2 & x_b & u_b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_i & b_i\ldots k_i & x_k & u_k \end{vmatrix}$$

$$+\ldots+\Delta_m\begin{vmatrix} a_1 & b_1\ldots k_1 & t_a & u_a \\ a_2 & b_2\ldots k_2 & t_b & u_b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_i & b_i\ldots k_i & t_k & u_k \end{vmatrix}=0.$$

Inmulțind aceste egalități respectiv cu l_1-l_2, $l_3,\ldots+(-1)^i l_{i+1}$ și adunându-le pe coloane, observăm că coeficienții lui Δ_1, $\Delta_2,\ldots\Delta_m$ sunt tocmai dezvoltările după coloana de rangul $i-1$, a determinanților corespunzători din (2 luați cu semnul $\pm$, și astfel avem:

$$\Delta_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1\ldots\ldots k_1 & x_a & u_a \\ a_2 & b_2\ldots\ldots k_2 & x_b & u_b \\ \ldots & \ldots\ldots & \text{i} & \ldots \\ a_i & b_i\ldots\ldots k_i & x_k & u_k \\ a_{i+1} & b_{i+1}\ldots k_{i+1} & x_l & u_l \end{vmatrix}$$

$$+\ldots+\Delta_m\begin{vmatrix} a_1 & b_1\ldots\ldots k_1 & t_a & u_a \\ a_2 & b_2\ldots\ldots k_2 & t_b & u_b \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \\ a_i & b_i\ldots\ldots k_i & t_k & u_k \\ a_{i+1} & b_{i+1}\ldots k_{i+1} & t_l & u_l \end{vmatrix}=0.$$

Deci dacă teorema e adevărată pentru i, e adevărată și pentru $i+1$, Cum însă am demonstrat în *Nota Matematică* No. 4, din „R. M. T.“, an. V, că teorema e adevărată în cazul $i=2$ și $i=3$, rezultă că e adevărată și pentru $i=m$, adică că:

$$\Delta_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1\ldots l_1 & x_1 & u_1 \\ a_2 & b_2\ldots l_2 & x_2 & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_m & b_m\ldots l_m & x_m & u_m \end{vmatrix}+\Delta_2\begin{vmatrix} a_1 & b_1\ldots l_1 & y_1 & u_1 \\ a_2 & b_2\ldots l_2 & y_2 & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_m & b_m\ldots l_m & y_m & u_m \end{vmatrix}$$

$$+\ldots+\Delta_m\begin{vmatrix} a_1 & b_1\ldots l_1 & t_1 & u_1 \\ a_2 & b_2\ldots l_2 & t_2 & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_m & b_m\ldots l_m & t_m & u_m \end{vmatrix}=0.$$

V. ALACI

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXX, No. 9, Mai 1925. Rezultatul concursului Gazetei Matematice din anul 1925, de *G. Țițeica*. Chestiunea Calendarului, (urmare), de *C. D. Orășeanu*, Premiul „Inginer *H. Capriel*“ de *N. Abramescu, A. Angelescu* și *G. Bratu*.

2. *Foaia Matematică*, anul II, Aprilie 1925. O teoremă remarcabilă, de *M. Grümbaum*. Relații trigonometrice între elementele urui triunghiu, de *Gh. D. Simionescu*.

3. *Jurnal Matematic*. anul II, Aprilie 1925, de *Tiberiu Popovici*. Asupra diferențelor finite, de *Tib. Popovici*. Note matematice, de *Gr. Moisil, E. Ștefănescu, W. Solomon* și *Tib. Popovici*.

4. *Curierul Matematic*, vol. I, No. 3, Mai 1925. O clasă de polinoame ortogonale, de *M. Ghermănescu*. Asupra formulei binomului și a factorialei, de *Tib. Popovici*.

5. *A. Angelesco*. Détermination de certaines courbes par des ensembles discrets de points. (Extrait du Bulletin de la Société mathématique de France, t. LI; 1923 p. 236—238).

6. *A. Angelesco*. Sur les polynomes hypergéométriques. (Extrait des Nouvelles Annales de Mathématiques, t. III; janvier 1925).

7. *P. Sergesco*. Quelques remarques sur les noyaux symétriques. (Buletinul Societății de Științe, Cluj, t. II. 1923.

8. *P. Sergesco*. Sur le noyaux symétriques gauches. (Buletinul Societății de Științe. Cluj, t. II, 1923).

PROBLEME REZOLVATE

340. — *Să se verifice identitatea:*

$$\frac{2ac\sqrt{2}}{\sqrt{b^2-4ac}+b}=\sqrt{b^2-2ac-\sqrt{(b^2-2ac)^2-4a^2c^2}}$$

V. ALACI

Soluție dată de d-nii: *Băjenică N.* (lic. Brașov), *Chirilă Ion* (lic. Internat, Iași), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Istinie I. Brezuică* (lic. Caracal), *Marinescu S. D.* (Ploești), *Milner I.* (Edinți) și *Predescu I. Niculai* (lic. Caracal).

Insemnând cu A primul membru al identității, avem succesiv:

$$A = \frac{2ac\sqrt{2}}{\sqrt{b^2-4ac}+b} = \frac{2ac\sqrt{2}\,(\sqrt{b^2-4ac}-b)}{-4ac}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b^2-4ac}-b)$$

Ridicând la patrat, avem:

$$A^2 = \frac{1}{2}(2b^2-4ac-2b\sqrt{b^2-4ac})$$

$$= b^2-2ac-\sqrt{(b^2-2ac)^2-4a^2c^2}$$

$$\therefore\ A = \sqrt{b^2-2ac-\sqrt{(b^2-2ac)^2-4a^2c^2}},$$

și avem astfel identitatea dată.

Soluția 2-a, dată de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Bartolomeu V.* (lic. Tg.-Mureș), *Beju Traian* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Berdan C.* (București), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat Iași), *Frătici Ioan* (lic. Brașov), *Ghinicescu I. Gh.* (lic. Internat, Iași), *Gradiny I. Gheorghe* (Șc. Polit. Timișoara), *Grigore Virgil* (lic. Tg.-Jiu), *Grofșoreanu I. Gheorghe* (lic. Lugoj), *Iacob St. Eugen* (lic. Botoșani), *Ionescu Anton* (lic. Milit. Craiova), *Ionică Ioan* (lic. Brașov), *Iscovici I. Paul* (lic. Pitești), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iași), *Manoil, Mateescu N.* (București), *Nicolau C-tin* (lic. R.-Sărat), *Petrescu St. Dan* (lic. Milit. Craiova), *Popescu N. Nicolai* (lic. Câmpina), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Rădulescu Gh. Nicolae* (lic. Caracal), *Râmniceanu L. Radu* (lic. Tg.-Jiu), *Schächler O.*, *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Stănciulescu A. Gheorghe* (Pitești), *Ștefănescu Emil*, *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul București), *Țanovici V. C-tin* (lic. Ploești), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu) și *Velea Gr. Mihail* (lic. Milit. Craiova).

Membrul al 2-lea fiind de forma $\sqrt{A-\sqrt{B}}$, știm că avem:

$$(1)\ \sqrt{A-\sqrt{C}} = \sqrt{\frac{A+C}{2}} - \sqrt{\frac{A-C}{2}},\ \text{unde}\ A^2-B=C$$

In cazul nostru:

$$A = b-2ac,\quad B = (b^2-2ac)^2-4a^2c^2$$

$$A^2-B = 4a^2c^2 = C^2,\ \text{deci}\ C = 2ac$$

Inlocuind în (1) pe A, B, C, avem:

$$\sqrt{b^2-2ac-\sqrt{(b^2-2ac)^2-4a^2c^2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

$$-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{2}} = \frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4ac}{\sqrt{2}(b^2-4ac+b)} = \frac{2ac\sqrt{2}}{\sqrt{b^2-4ac}+b},$$

și identitatea este astfel stabilită.

Soluția 3-a. Primul membru al identității date, se poate scrie:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b^2-4ac}-b),$$

cum am văzut în prima soluție, așa că avem de verificat:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{b^2-4ac}-b)$$

$$= \sqrt{b^2-2ac-\sqrt{(b^2-2ac)^2-4a^2c^2}}$$

Ridicând la patrat avem:

$$\frac{1}{2}(2b^2-4ac-2b\sqrt{b^2-4ac})$$

$$= b^2-2ac-b\sqrt{b^2-4ac}$$

ceiace este evident.

Soluții analoage date de d-nii: *Agapescu N.* [Semin. Pedag. Iași], *Angelescu N. Traian* [lic. Giurgiu], *Antistescu N.* [lic. Internat, Iași], *Aposteanu Ioan* [lic. Timișoara], *Ardelea Radu* [lic. Milit. Craiova], *Babeș Al.* [lic. Internat, Iași], *Băncilă M.* [lic. Brașov], *Beșchea Nicolae* [lic. Brașov], *Bosie V.* [lic. Internat, Iași], *Botea G. Nicolae* [București], *Botiș E. Virgil* [lic. Arad], *Braeșter O.* [lic. Național Iași], *Brădețeanu C. Cornel* [Craiova], *Bruda N.* [lic. Făgăraș], *Caracaș I. Gh.* [lic. Botoșani], *Călin M. Gh.* [lic. Arad], *Ciorănescu I. C-tin* [lic. M-rea Dealu], *Chelaru D-tru* [lic. Roman], *Cligher A.* [Șc. Polit. Timișoara], *Cocorandu Dan* [lic. Brașov], *Cogan Alter* [lic. Chișinău], *Constantinescu D. D-tru* [lic. Cantemir, București], *Constantinescu Gr. Ion* [Buzău], *Constantinescu Mihail* [lic. Cantemir, București], *Constandinidi Radu* [Roman], *Corșoreanu Gh.*

Gheorghe [lic. Tg.-Jiu], *Critz D. M.* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Curcubată Dionisie* [lic. Braşov], *David I. Ioan* [Buzău], *David Gh.* [lic. Timişoara], *Dărmanescu I.* [lic. Fr. Buzeşti, Craiova], *Dângă G. Vlad* [lic. Orheiu], *Dimitrescu Mişu* [lic. Roman], *Drăgan G.* [lic. Braşov], *Drăghici Aurelian* [Tg.-Jiu], *Dumitrescu Stelian* [lic. Braşov], *Eleomir, Olariu T. Enea* [Şc. Polit. Timişoara], *Florea V. Gheorghe* [lic. Craiova], *Florescu M. Octavian* [lic. Caracal], *Frătici I.* [Şc. Polit. Timişoara], *Frumuşelu Gh.* [lic. Braşov], *Gavrilescu I.* [lic. Ploeşti], *Gataianţu V. Barbu* [lic. Caracal], *Gârleşteanu Mihail* [lic. Timişoara], *I. N. Georgescu-Val* [Dadilov], *Gherbanowschi F Nicolae* [lic. Orhei], *Grubenmann I. Gr.* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Hătăran Gheorghe* [lic. Internat, Iaşi], *Hart L., Iacob St. Eug.* [Botoşani], *Ianculescu Octavian* [Cond. de Mine], *Ieremia Petru* [lic. Timişoara], *Iliescu St. Dima* [lic. Tg.-Mureş], *Ionescu Angelo* [lic. Cluj], *Ionescu Th. Andrei Bujor* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ionescu Th. C-tin Bujor* [lic. Cantemir, Bucureşti], *Ionescu C. Nicolae* [lic. Sf. Sava, Bucureşti], *Ionescu I. Paul* [lic. M-rea Dealu], *Istinie I. C-tin* [lic. Caracal], *Katz Lazăr* [lic. Botoşani], *Manafu Valeriu* [lic. M-rea Dealu], *Marini Paul* [stud. Cluj], *Maris Marius* [lic. Arad], *Mihăilescu C. Grigorie* [Oradea Mare], *Mihăilescu Şt. Nicolae* [lic. Matei-Basarab, Bucureşti], *Mihăilescu Romeo* [R.-Vâlcea], *Miu M. Ioan* [lic. Caracal], *Niculescu Alexandru* [lic. Tg.-Mureş], *Novacu A. C. Valeriu* [lic. Arad], *Paraschivescu-Bosnief* [lic. Spiru-Haret, Bucureşti], *Piperiu N. Nicuşor* [lic. Internat, Iaşi], *Placa Mircea* [lic. Botoşani], *Polaczek Franz* [lic. Câmpulung, Bucovina], *Pop Iulian* [Cluj], *Popa Ilie* [lic. Internat, Iaşi], *Popa Oct.* [lic. Făgăraş], *Popovici Th. Ion* [Şc. Polit., Bucureşti], *Popovici Th. Mihai* [lic. Internat, Iaşi], *Puşcă Toma* [lic. Internat, Iaşi], *Rauch S.* [lic. Naţional, Iaşi], *Rauchbach Arthur* [Gura-Humorului, Bucovina], *Răpeanu Virgil* [lic. Internat, Iaşi], *Rătan I.* [lic. Braşov], *Roman I. Ioan* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti], *Roşu Alexandru* [lic. M-rea-Dealu], *Russu C. Adrian* [lic. Internat, Iaşi], *Sergheev Ioan* [Şc. Polit. Timişoara], *Scripcă Laur* [lic. Naţional, Iaşi], *Şerban Tiberiu* [lic. Zărneşti], *Şerban Aurel* [lic. Braşov], *Silistrărianu C.* [Ploeşti], *Simionescu D. Gh.* [lic. M-rea Dealu], *Spacu Gh. Petru* [Cluj], *Spârchez Zeno* [Şc. Polit. Timişoara], *Staicu Irimie* [lic. Braşov], *Stamatescu I. Valeriu* [Semin. Pedag. Bucureşti], *Stoian I.* [lic. Braşov], *Stoicescu Teodor* [lic. Internat, Iaşi], *Teodorescu N.* [lic. Spiru-Haret, Bucureşti], *Tanovici V. C-tin* [lic. Ploeşti], *Ulea C. Titus* [lic. Internat, Iaşi], *Vasiliu Gh. Gheorghe* [lic. Timişoara], *Vasiliu H. Şt.* [Iaşi], *Velea Gr. Mihail* [lic. Craiova], *Vladea Ioan* [lic. Braşov], *Wagner W.* [lic. Craiova], *Wallechner Emil* [Govora], şi *Zarda Ion* [lic. Tg.-Jiu].

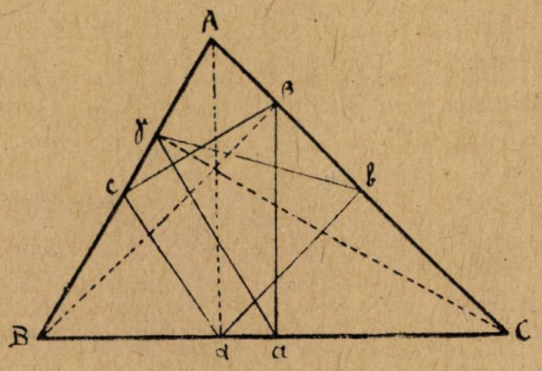
Alte soluţii date de d-nii: *Budişteanu Alex.* [lic. M-rea Dealu], *Georgescu Jean* [lic. M-rea Dealu], *Pătroianu I. Mihail* [lic. M-rea Dealu], *Popa-Petrescu Nicolae* [lic. Braşov], *Purdilă C-tin* [lic. Braşov], *Tărăbuţă C. Paul* [lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti].

342. *Fie a, b, c; α, β, γ respectiv picioarele medianelor şi înălţimelor triunghiului* ABC. *Să se găsească perimetrul exagonului stelat* $a\beta c\,\alpha b\gamma$, *perimetrul triunghiului* ABC *fiind cunoscut.*

ION PROTOPOPESCU

In triunghiul dreptunghic $B\beta C$, dreapta $a\beta$ unind vârful unghiului drept cu mijlocul ipotenuzei, se ştie că ea este jumătatea ei, adică:

$$a\beta = \frac{BC}{2}.$$



Asemenea în triunghiurile dreptunghice $A\beta B$, $A\alpha B$, $A\alpha C$, $A\gamma C$ şi $B\gamma C$, putem scrie analog:

$$\beta c = \frac{AB}{2},\quad c\alpha = \frac{AB}{2},\quad \alpha b = \frac{AC}{2},$$

$$b\gamma = \frac{AC}{2},\quad \gamma a = \frac{BC}{2}.$$

Urmează că:

$$a\beta + \beta c + c\alpha + \alpha b + b\gamma + \gamma a = \frac{BC}{2} + \frac{AB}{2}$$

$$+ \frac{AB}{2} + \frac{AC}{2} + \frac{AC}{2} + \frac{BC}{2} = AB + AC + BC,$$

adică perimetrul exagonului stelat cerut este egal cu perimetrul triunghiului ABC.

Observare. A se vedea în „R. M. T.“, an. V, No. 3, p. 40, generalizarea acestei probleme.

Soluţii bune date de d-nii: *Agapescu M. Nicolai* (Sem. Pedag. Iaşi), *Antistescu Nicolae* (lic. Internat, Iaşi), *Ardelea Radu* (lic. Braşov), *Babeş Al.* (lic. Internat, Iaşi), *Băjenică Nicu* (lic. Braşov), *Băncilă Mircea* (Braşov), *Beju T.* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (R.-Sărat), *Berdan C.* (Bârlad), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braeşter Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Budişteanu Alex.* (lic. M-rea Dealu), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Cligher A.* (Şc. Polit. Timişoara), *Constantinescu D. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (Tg.-Jiu), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dinu Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Dumitrescu Stelian* (lic. Braşov), *Frătici I.* (Şc. Polit. Timişoara), *Frumuşelu Gh.* (lic. Braşov), *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *Grigore Virgil* (lic. T.-Jiu), *Goldstein N.* (Şc. Polit., Timişoara), *Grofşoreanu I. Gheorghe* (lic. Lugoj), *Grubenmann Ionel* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Hart Lazăr* (lic. Galaţi), *Hătăran Gheorghe* (lic. Internat, Iaşi), *Iliescu M.* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Marcovici H.* (lic. Botoşani), *Mihăilescu A.*

C-tin (lic. Internat, Iași), *Milner I.* (Șc. Polit., Timișoara), *Neacșu Gh. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Olariu T. Enea* (Șc. Polit., Timișoara), *Petrescu St. Al. Dan* (lic. Milit. Craiova), *Piperiu Nicușor* (lic. Internat, Iași), *Popa Ilie* (lic. Internat, Iași), *Pop Alexandru* (stud., Cluj), *Popescu I. Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Popovici Aurel* (lic. Focșani), *Popovici Th. Ion* (Șc. Polit, Timișoara), *Popovici Th. Mihai* (lic. Internat, Iași) *Pușcă I. Toma* (lic. Internat, Iași), *Râmniceanu L. Radu* (lic. Tg.-Jiu), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Resnoveanu Emil* (lic. Brașov), *Roșu Al. Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Rucăreanu Nicolae*, *Russu C. Adrian* (Iași), *Scripcă Laur* (lic. Național, Iași), *Segârceanu D. C-tin* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Segârceanu C. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Șerban I. Tiberiu* (Zărnești), *Silistrărianu C.* (Ploești), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Spârchez Zeno* (Șc. Polit., Timișoara), *Stamatescu I. Valeriu* (Sem. Pedag., București), *Stănciulescu Dan* (lic. M-rea Dealu), *Stănescu Aurel* (lic. M-rea Dealu). *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul București), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Ulea C. Titus* (lic. Național, Iași), *Velea Gr. Mihail* (lic. Milit. Craiova), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov), *Voiculescu C. Ștefan* (Șc. Polit., Timișoara) și *Wallecner Emil* (Govora).

In ultimul timp s'au primit soluții dela d-nii: *Călin M. Gheorghe* (lic. Caracal) și *Katz Lazăr* (lic. Botoșani).

372*. — *Se dau cercurile* O, O′ *de raze* R *și* R′. *Fie* A *și* A′ *două puncte fixe pe cele două cercuri. Se cere;*

1) Să se construiască pe cele două cercuri, și în același senz, arcele AM, A′M′ *respectiv proporționale cu* R *și* R′.

2) Dacă P *și* P′ *sunt punctele care împart pe* MM′ *în raportul* $\frac{R}{R'}$, *să se arate că cercul de diametru* PP′ *trece printr'un punct fix* F.

3) Să se arate că triunghiurile FAA′, FOO′ *și* FMM′ *sunt asemeni.*

4) Să se caute locul lui F *când* A *și* A′ *se mișcă pe cele două cercuri.*

5) Să se arate cum trebuesc modificate proprietățile precedente când R *și* R′ *sunt egale.*

6) Să se examineze cazul când AM *și* A′M *sunt luate în sensuri diferite.*

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

Soluție dată de d-l *P. C. Tărăbuță* (lic. Mihai-Viteazul, București).

1). Conform enuțului avem:

$$\frac{\text{arc } AM}{R} = \frac{\text{arc } A'M'}{R'}$$

Primul raport fiind egal cu unghiul AOM iar doilea cu unghiul A′O′M′, rezultă că:

al

$$\widehat{AOM} = \widehat{A'O'M'}$$

și construcția punctelor M și M′ se deduce imediat.

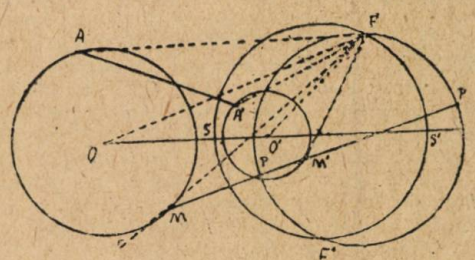
2). Fie S și S′ centrele de asemănare ale cercurilor O și O′. Cercul de diametru SS′ se taie cu cercul de diametru PP′ în punctele F și F′. Cercul PP′ este locul punctelor ale căror distanțe la M și M′ au un raport egal cu $\frac{R}{R'}$, iar cercul SS′ este locul punctelor ale căror distanțe la O și O′ au un raport egal cu $\frac{R}{R'}$. Deci:

$$\frac{FM}{FM'} = \frac{FO}{FO'} = \frac{PM}{PM'} = \frac{P'M}{P'M'} = \frac{R}{R'}.$$

Primele două și ultimul raport arată că triunghiurile FOM și FO′M′ sunt asemeni ca având laturile proporționale. De unde se deduce:

$$\widehat{OFM} = \widehat{O'FM'} \quad \text{și} \quad \widehat{OFO'} = \widehat{MFM'}$$

ceiace arată că triunghiurile OFO′ și MFM′ sunt asemeni ca având unghiuri egale cuprinse între latre laturi proporționale. Pe de altă parte triunghiurile isoscele OAM, O′A′M′ fiind asemeni prin construcție, urmează asemănarea triunghiurilor



OAF și O′A′F′ de unde se deduce asemănarea triunghiurilor AFA′ și OFO′. De aici urmează:

$$\frac{FA}{FA'} = \frac{FO}{FO'} = \frac{R}{R'}$$

ceiace arată că F se găsește la intersecția cercului fix SS′ cu un alt cerc fix descris pe A_1A_1' ca diametru, A_1 și A_1' fiind punctele care împart segmentul AA′ în raportul $\frac{R}{R'}$. Prin urmare punctele F și F′ sunt fixe.

3) Demonstrația proprietăților cerute la acest punct esle cuprinsă în 2).

4) Este evident că locul lui F și F′ este cercul S S′.

5) Când R = R′ cercurile A_1A', SS′, PP′ devin drepte perpendiculare respectiv pe mijloacele segmentelor A A′, O O′ și M M′. Punctul F este în acest caz la intersecția dreptelor fixe, perpendiculare pe mijlocul lui A A′ și O O′.

6) Când arcele AM, A′M′ sunt luate în senz invers, cercul P P′ trece prin punctul F′. Demonstrația se face identic ca la 2) înlocuind peste tot litera F prin F′.

Notă. 1). D-l *P. C. Tărăbuță* observă că triunghiurile F A M, F A′ M′; F M O, F M′ O′; F A O, F A′ O′; F A M, F′ A′ M′; F′ A′ O′, F′ A O; F′ M O, F′ M′ O′; F′ A M F′ A′ M′ sunt asemeni două câte două.

2). Au mai rezolvat problema prin geometria elementară d-nii: *Drăghicean M.* (lic. Șaguna, Brașov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret. București).

3). D-ra *Blasko Beatrix* a dat o bună soluție analitică pentru punctul 2) al problemei.

387. — *Să se demonstreze că dacă un număr ridicat la puterea a patra se termină cu el însuși, atunci și patratul lui se va termina tot cu numărul însuși.*

EMIL ȘTEFANESCU

Soluție dată de d-nii: *Berdan C.* (București), *Blasko Beatrix* (Lugoj) și *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu).

Fie n un număr de p cifre. Din enunț rezultă:

$$n^4 - n = \text{mult. } 10^p.$$

sau: $$n(n-1)(n^2+n+1) = \text{mult. } 10^p.$$

Factorul n^2+n+1 este prim cu 10. In adevăr:

$$n^2+n+1 = n(n+1)+1 = \text{mult. } 2+1.$$

Apoi n față de 5 fiind de forma: mult. 5, mult. 5 ± 1, mult. 5 ± 2, rezultă că n^2+n+1 este respectiv de formele: mult. $5+1$, mult. $5+3$, mult. $5+1$, mult. $5+2$, și mult. $5+3$, deci: n^2+n+1 este prim cu 5, fiind și cu 2, înseamnă că n^2+n+1 este prim cu 10, deci și cu 10^p.

Urmează neapărat că:

$$n(n-1) = \text{mult. } 10^p$$

* * * $n^2 - n = \text{mult. } 10^p$,

ceiace dovedește că dacă puterea a 4-a a unui număr se termină cu numărul însuși și puterea a 2-a a lui se termină cu numărul însuși.

Observare făcută de autor și de d-l *Berdan C. C-tin* (București). Dacă n^2 se termină cu n, n^3 se termină cu n^2, care la rândul lui se termină tot cu n. Rezultă condițiunea:

Pentru ca un număr ridicat la orice putere să se termine cu el însuși, este de ajuns ca patratul lui să se termine cu el.

Observare. D-l *Roșu Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *a arătat că, dacă* N *este un număr întreg și dacă* N^p *se termină cu* N^q $(p > q)$, *atunci orice putere a lui* N *de forma* $N^{m(p+q)+q}$ *se termină prin* N^q, *numerile* m, p, q *fiind întregi și pozitive.*

Fie r numărul cifrelor lui N^q și n o valoare a lui m pentru care $N^{n(p-q)+q}$ se termină cu N^q. Vom dovedi că proprietatea este adevărată și pentru $m = n+1$. Prin ipoteză avem dar: $N^{n(p-q)+q} = \text{mult. } 10^r + N^q$. înmulțind cu N^{p-q}, găsim:

$$N^{(n+1)(p-q)+q} = \text{mult. } 10^r \cdot N^{p-q} + N^p.$$

Cum; mult. $10^r \cdot N^{p-q}$ se termina cu N^q, urmează că mult. $10^r \cdot N^{p-q} + N^p$ și deci $N^{(n+1)(p-q)+q}$ se termină cu N^q. Insă pentru $m = 1$ proprietatea este verificată, ea este deci generală.

Alte soluții mai puțin riguroase, date de d-nii: *Beșchea G. Nicolae* (lic. Brașov), *Boghiu Iosif* (lic. Brașov). *Curcubată Dionisie* (lic. Brașov), *Fischer M. I.* (Bacău), *Gataianța V. Barbu* (lic. Caracal), *Ionescu C. Nicolae* (lic. Sf. Sava, București), *Katz Lazăr* (lic. Botoșani), *Podeanu P. Aurel* (lic. Pitești), *Popovici Th. Ion* și *Vlădea Ioan.*

416. — *Să se demonstreze identitatea:*

$$\frac{(1-ma^2)(1-na)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{(1-mb^2)(1-nb)}{(b-a)(b-c)(b-d)} +$$

$$\frac{(1-mc^2)(1-nc)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{(1-md^2)(1-nd)}{(d-a)(d-b)(d-c)} = mn$$

V. VALCOVICI

Soluție dată de: *Neuman Maria* (Lugoj), *Pop Iulian* (Cluj) și *Spacu Gh. Petru* (Cluj).

Insemnând cu A primul membru și scăpând de numitor, putem scri succesiv:

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)\,A = -(1-a^2m-an+a^3mn)\begin{vmatrix}1&1&1\\b&c&d\\b^2&c^2&d^2\end{vmatrix}+(1-b^2m-bn$$

$$+b^3mn)\begin{vmatrix}1&1&1\\a&c&d\\a^2&c^2&d^2\end{vmatrix}-(1-c^2m-cn+c^3mn)\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&d\\a^2&b^2&d^2\end{vmatrix}+(1-d^2m-dn+d^3mn)\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}.$$

$$=-\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\end{vmatrix}+m\begin{vmatrix}a^2&b^2&c^2&d^2\\1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\end{vmatrix}+n\begin{vmatrix}a&b&c&d\\1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\end{vmatrix}-mn\begin{vmatrix}a^3&b^3&c^3&d^3\\1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\end{vmatrix}$$

Dar primii trei determinanţi sunt nuli, având câte două linii egale, aşa că rămâne:

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)\,A = mn\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^3&b^3&c^3&d^3\end{vmatrix}$$

Cum produsul primilor 6 factori din membrul întâi, ne dă dezvoltarea determinantului *Vandermonde* din membrul al 2-lea, simplificând obţinem:

$$A = mn.$$

Identitatea este astfel stabilită.

Altă soluţie dată de d-l *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti).

Vom demonstra mai general identitatea:

$$\frac{(p-ma^2)(p-na)}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\frac{(p-mb^2)(p-nb)}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$$

$$\frac{(p-mc^2)(p-nc)}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\frac{(p-md^2)(p-nd)}{(d-a)(d-b)(d-c)}=mn$$

Insemnând cu A primul membru şi aducând la acelaşi numitor, avem:

$$A=\frac{N}{M},$$

unde:

$$N=(p-ma^3)(p-na)(b-c)(b-d)(c-d)$$
$$-(p-mb^2)(p-nb)(a-c)(a-d)(c-d)$$
$$+(p-mc^2)(p-nc)(a-b)(a-d)(b-d)$$
$$-(p-md^2)(p-nd)(a-b)(a-c)(b-c)$$

$$M=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

Dacă în N facem $a=b$, sau $a=c$, $a=d$, $b=c$, $b=d$, $c=d$ observăm că se anulează, deci N se divide cu $(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)=M$. Cum gradul lui N în raport cu a, b, c, d este 6 acelaşi cu al lui M, rezultă că câtul $\frac{N}{M}$ este independent de a, b, c, d. Acest cât se obţine deci particularizând pe a, b, c, d, de exemplu, luând $a=0$, $b=1$, $c=2$, $d=-1$, în care caz avem:

$$A=\frac{-6p^2+6(p-m)(p-n)-2(p-4m)(p-2n)+2(p-m)(p+n)}{-12}=mn,$$

și identitatea este astfel stabilită.

Soluțiuni analoage, pentru $p = 1$ — cazul enunțului — date de d-nii: *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iași), *Ghinicescu I. Gh.* (lic. Internat, Iași), *Ieremia Petru* (lic. Timișoara), *Popovici Aurel* (lic. Focșani), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Timișoara).

Alte soluții mai lungi date de d-nii: *Ardelea Radu* (lic. Milit. Craiova), *Diaconu B. Marin* (Romanați), *Grubenmann I. Gr.* (lic. Cantemir, București), *Ianculescu Octavian* (Conductor de Mine), *Iliescu Mircea* (lic. M-rea Dealu), *Munteanu I. Gheorghe* (lic. Milit. Craiova), *Neacșu Vasile* (lic. Brașov), *Novacu A. C. Valeriu* (lic. Arad), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Țăraș Vasile* (lic. Brașov), *Tanovici V. C-tin* (lic. Ploești), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, București) și *Vlădea Ioan* (lic. Brașov).

In ultimul timp s'au primit soluții dela d-nii: *Gherbanovschi Nicolae* (lic. Orhei), *Iacob St. Eugen* (lic. Botoșani), și *Ulea Titus* (lic. Internat, Iași).

431. — *Cu 1120 lei se cumpără un număr de bilete de intrare de rangul I și II. Știind că cele de rangul I costă 110 lei biletul, iar cele de rangul II, 70 lei biletul, să se găsească numărul biletelor de rangul I și II cumpărate.*

V. VALCOVICI

Fie x și y numărul biletelor de rangul I și II. Conform enunțului, avem:

$$110\,x + 70\,y = 1120,$$

sau:

$$11\,x + 7\,y = 112,$$

$$y = \frac{112 - 11\,x}{7} = 16 - \frac{11\,x}{7}.$$

y trebuind să fie întreg și pozitiv, urmează că $\frac{11\,x}{7}$ să fie întreg și mai mic ca 16. Cum 7 e prim cu 11, el trebuie să dividă pe x, și nu putem lua decât $x = 7$.

Rezultă:

$$y = 16 - 11 = 5.$$

Așa dar numărul biletelor de rangul I este 7 și de rangul II este 5.

Soluții date de d-nii: *Agarici Gr. D-tru* (lic. Milit. Iași), *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, București), *Anastasiu P. Vasile* (lic. Botoșani), *Apostoleanu D. Traian* (lic. Brașov), *Ardelea Radu* (lic. Milit. Craiova), *Băncilă Mircea* (lic. Brașov), *Beju Traian, Beldie D-tru* (R.-Sărat), *Beșchea Nic.* (lic. Brașov), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Boambău Ioan* (lic. Brașov), *Boroș P. Dan, Boroș I. Vasile* (lic. Brașov), *Botea G. N.* (lic. Cantemir, București), *Brădețeanu C. Cornel* (Craiova), *Buda Cesar* (lic. Milit. Iași), *Carolețean P.* (lic. Gh. Lazăr), *Caracaș I. Gh.* (lic. Botoșani), *Caracostea Andrei, Ciomofoiu Horia,* (lic. Sibiu), *Chinie Mihail* (lic. Pitești), *Christescu Ilie* (Alexandria), *Cojoc N. Gh.* (P.-Neamț), *Constantinescu Marius* (lic. Slatina), *Costea Octavian* (lic. Brașov), *Cristescu C. Ion* (lic. Șincai, București), *Cuncia Alfons* (lic. Internat, Iași), *Curcubată D.* (lic. Brașov), *Dânga S. Vlad* (lic. Orhei), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Dinu Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Drăgan G.* (lic. Brașov), *Drogeanu N. Paul* (Semin. Pedag., București), *Dugan-Castano Victor* (lic. M-rea Dealu), *Dumitrescu G. Haralamb* (lic. Giurgiu), *Dumitrescu Stelian* (lic. Brașov), *Ebner Arthur* (lic. Galați), *Feinștein Hermann* (lic. P.-Neamț), *Fezi Gh.* (lic. Orhei), *Florea V. Gheorghe* (lic. Craiova), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Foca I., Fränkel Felix* (lic. Lazăr, București), *Frumușelu H. Gheorghe* (lic. Brașov), *Gabrowsky W.* (lic. Brașov), *Gataianțu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gârleșteanu Mihail* (Șc. Polit., Timișoara), *Gherbanowsky F. Nicolae* (lic. Orhei), *Goldenzweig C. Leopold* (lic. Cantemir, București), *Grabowski Eugeniu* (lic. Orhei), *Grigore Nicolae* (Învățător, Ialomița), *Grubenmanu I. Grigore* (lic. Cantemir, București), *Iacob St. Eug.* (lic. Botoșani). *Iliescu St. Virgil* (lic. Tg.-Mureș), *Iachim Grigore* (lic. Milit., Iași), *Ionescu Th. Andrei-Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. C-tin-Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu C. Nicolae* (lic Sf. Sava, București), *Iscovici Paul* (lic. Pitești), *Istinie I. C-tin* (lic. Caracal), *Ivanovici A. Nicolae* (lic. Brașov), *Katz Lazăr* (lic. Botoșani), *Kestesz Paul, Lăzărescu I. Ion, Lăpădatu I. Miclea* (lic. Câhul), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iași), *Macri I. Ștefan* (lic. Lazăr, București), *Manole Gheorghe* (lic. Brașov), *Marcopol Apostol* (lic. Brașov), *Marineanu Traian* (lic. Timișoara), *Marinescu D.* (Ploești), *Maris Marius, Matak D. Radu* (Semin. Pedag., București), *Mihailescu Tasse* (lic. Brașov), *Moldoveanu Marin* (lic. Tg.-Mureș), *Morțun Emil* (lic. Lazăr, București), *Motaș C.* (București), *Motculescu M. Ștefan* (lic. Sf. Sava, București), *Moțoiu V.* (lic. Brașov). *Munteanu I. Gheorghe* (lic. Milit., Craiova), *Niculescu St. Emanuel* (lic. Mil. Craiova), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Nicolau C. Ioan* (lic. Militar, Craiova), *Noica Ion* (lic. Cantemir. București), *Oana Ioan* (lic. Făgăraș), *Pantu Z. I., Paraschivescu D. Bosnief* (lic. Spiru Haret, București), *Pârvu Aurel* (București), *Placa Mircea* (lic. Botoșani), *Podariu Al.* (lic. P.-Neamț), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Pop Iulian* (lic. Cluj), *Popa V. Adrian* (lic. Brașov), *Popa-Petrescu Nicolae* (lic. Brașov), *Popa Iulian* (lic. Făgăraș), *Popescu I. Alex.* (lic. M-rea Dealu), *Popescu Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popovici Dan Puiu* (Chișinău), *Purdilă C-tin* (lic. Brașov), *Pușcă I. Toma* (lic. Internat, Iași), *Rădulescu C Mihail* (lic. R.-Sărat), *Rapaport N. A.* (lic. Botoșani), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Resnoveanu Emil* (lic. Brașov), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Brașov), *Rusanda Gheorghe* (lic. Arad), *Săndulescu I. Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Schutz Pavel* (lic. Cluj), *Șerban Aurel* (lic. Brașov), *Severin Marcel* (lic. Botoșani), *Sfințescu T. Duiliu* (lic. Lazăr, București), *Simion Gh. Boldur* (lic. Sf. Sava, București), *Stănciulescu Dan* (lic. M-rea Dealu), *Stănescu A. Amărăști* (lic. M-rea Dealu), *Stănescu D. Teodoru* (lic. M-rea Dealu), *Stern B. Arthur* (lic. Craiova), *Stoica N. Aureliu* (București), *Stoica I. D-tru* (lic R.-Sarat), *Stoicescu Teodor* (lic. Internat, Iași), *Stoian I.* (lic. Brașov), *Stroescu I. Gheorghe* (lic. Tg.-Mureș), *Țăraș Vasile* (lic. Brașov), *Totulea Valeriu, Tudose C. Tănase* (lic. Câmpina), *Tu-*

nariu R. Traian (lic. Craiova), *Ianovici V. C-tin* (lic. Ploești), *Țigoiu Ioan* (Constanța), *Ulea Titus* (lic. Internat, Iași), *Urzică P.* (P.-Neamț), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, București), *Vasiliev Ilie* (lic. Tulcea), *Văcăreanu A. Em.* (lic. Cantemir, București), *Velea Gr. Mihail* (lic. Mil. Craiova), *Vlad Octavian* (lic. Sf. Sava, București), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timișoara), *Voinescu D. Ioan* (lic. Cantemir, București), *Vulpanovici Boris* (lic. Chișinău), *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina) și *Zamfirescu Ioan* (lic. Fr. Buzești, Craiova).

In ultimul timp s'au primit soluții dela d-nii: *Băjescu Nicolae* (lic. Milit. Chișinău), *Bruștuc Gheorghe* (lic. Milit. Iași), *Ctffer I. Simeon* (lic. Giurgiu), *Cocorandu Dan* (lic. Brașov), *Hulubei Telemac*, *Ianovici Adrian* (lic. Siret, Bucovina), *Iliescu Mircea* (lic. M-rea Dealu), *Iliuță I. Ion* (lic. Caracal), *Novacu A. C. Valeriu* (lic. Arad), și *Surugiu Vasile* (lic. M-rea Dealu).

PROBLEME PROPUSE

455. — Cum trebue să fie a, astfel ca numărul format punând la sfârșitul lui a îndoitul lui, iar la sfârșitul acestuia punând iarăși pe a, să fie patrat perfect?

GH. CONSTANTINESCU

456. — Pentru numerotarea paginilor unei cărți s'au întrebuințat 6322 caractere. Știind că între paginele 10 și 99 există 7 foi care nu sunt numerotate de cât pe o față și 5 foi care nu sunt numerotate de loc, și că între paginile 99 și 999 sunt 21 foi numerotate numai pe o față și 15 nenumerotate de loc, se cere numărul foilor acelei cărți.

E. RESNOVEANU.

457. — Se dă un cerc O de rază R și un punct A pe acest cerc. Pe prelungirea diametrului ce trece prin A se ia AB=R. Din punctul B se duce BC tangentă la cerc în punctul C. Pe prelungirea lui BC se ia CD=R și fie E proecția lui D pe diametru ce trece prin A. Să se demonstreze că DA este perpendiculară în H pe CE și că trtunghiul AHE este dreptunghiu isoscel.

VASILE TARAS

458. — O dreaptă ce trece prin centrul I al cercului înscris în triunghiul ABC tae cercurile BIC, CIA, AIB respectiv în P_a, P_b, P_c. Fie A', B', C' trei puncte coliniare pe laturile lui ABC. Fie A'', B'', C'' intersecțiile dreptelor P_aA', P_bB', P_cC' respectiv cu cercurile BIC, CIA, AIB. Tangentele în A'', B'', C'' respectiv la cercurile BIC, CIA, AIB, tae laturile BC, CA, AB în trei puncte coliniare.

MICU GRÜNBAUM

459. Să se arate că:

$$1.2+2.3+3.4.2+4.5.2^2+5.6.2^3 + \ldots + (n-1)\,n\,.\,2^{n-3}$$

se divide cu n^2-3n+4. Care este câtul?

EMIL STEFANESCU

460. — Să se demonstreze identitățile:

$$y\,z\left[(y^2-a^2)(z^2-a^2)\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\delta u}{\delta y\,\delta z}$$

$$= z\,x\left[(z^2-a^2)(x^2-a^2)\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\delta^2 u}{\delta z\,\delta x}$$

$$= x\,y\left[(x^2-a^2(y^2-a^2)\right]^{\frac{1}{2}}\frac{\delta^2 u}{\delta x\,\delta y} = a^2\,u\,(2\,u^2-1),$$

funcția u fiind dată de relația:

$$a\,u = \frac{x\,y\,z}{a^2-\left[(y^2-a^2)(z^2-a^2)\right]^{\frac{1}{2}}-\left[(z^2-a^2)(x^2-a^2)\right]^{\frac{1}{2}}-\left[(x^2-a^2)(y^2-a^2)\right]^{\frac{1}{2}}}$$

V. VALCOVICI.

461. — Să se arate că:

$$\frac{n+1}{2}+n\cos 2t+(n-1)\cos 4t + \ldots + 2\cos 2(n-1)t+\cos 2nt = \frac{\sin^2(n+1)t}{4\sin^2 t}$$

V. ALACI

462. — Să se rezolve un triunghiu oarecare ABC, cunoscându-se mediana m ce pleacă din vârful B, unghiul format de aceasta cu latura AB, raza cercului înscris r, și raza cercului exînscris la latura BC.

ION CHIRILA.

INFORMATIUNI

Incepând cu acest număr, anunțăm că nu vom mai lua în considerare, problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul V-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

60 (ȘASEZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL V. 15 IULIE 1925 No. 5

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 6 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 60 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. EMIL ȘTEFANESCU. IDENTITATI ALGEBRICE DEDUSE CU AJUTORUL CALCULELOR DE ALGEBRA ELEMENTARA.
2. NOTE MATEMATICE, 6, 7.
3. CHESTIUNI DE EXAMEN.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 341, 353, 426, 437.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat, 60 lei
Anul III, broșat, 60 lei
Anul IV, broșat, 60 lei.

ANUL V. — NO. 5 TIMISOARA, 15 IULIE 1925

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 6 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 60 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

IDENTITAȚI ALGEBRICE DEDUSE CU AJUTORUL CALCULELOR DE ALGEBRA ELEMENTARA

de EMIL ȘTEFANESCU

In acest articol vreau să arăt că folosindu-ne de calculele cele mai elementare de algebră, putem deduce o mulțime de identități interesante.

Să considerăm identitatea

$$(1)\quad a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Inlocuind aci pe $(a+b)$, $(b+c)$, $(c+a)$ respectiv prin c, a, b obținem identitatea:

$$(2)\quad (a+b-c)^3+(b+c-a)^3+(c+a-b)^3 = (a+b+c)^3-24\,abc.$$

Inlocuind în (1) pe a, b, c prin $a(b-c)$, $b(c-a)$, $c(a-b)$ avem:

$$(3)\quad \sum \frac{a^3(b-c)^2}{(a-b)(a-c)} = -3abc.$$

Din identitatea $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a+b) = bc(b-c)+ab(a-b)+ac(c-a)$ deducem

$$(4)\quad \sum \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} = \sum \frac{bc}{(a-b)(a-c)} = 1.$$

Să considerăm sistemul

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma z=k \\ \alpha^2 x+\beta^2 y+\gamma^2 z=k^2 \\ \alpha^3 x+\beta^3 y+\gamma^3 z=k^3 \end{cases}$$

rezolvind găsim

$$x=\frac{k(k-\beta)(k-\gamma)}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$y=\frac{k(k-\alpha)(k-\gamma)}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}$$

. . . . . .

Inlocuind în ecuațiile a II-a și III-a, avem:

$$k^2=\sum \alpha^2 x=\sum \frac{\alpha k(k-\beta)(k-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},\quad \text{deci:}$$

$$(5)\quad \sum \frac{\alpha(k-\beta)(k-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} = k.$$

Apoi:

$$k^3=\sum \alpha^3 x=\sum \frac{\alpha^2 k(k-\beta)(k-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},\quad \text{deci:}$$

$$(6)\quad \sum \alpha^2 \frac{(k-\beta)(k-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} = k^2.$$

Relațiile (5) și (6) demonstrează problema 3156 din G. M., rezolvată la pag. 71 a. c.

Inmulțind primele două ecuații ale sistemului de mai sus, avem:

$$(\alpha x+\beta y+\gamma z)(\alpha^2 x+\beta^2 y+\gamma^2 z) = \sum \alpha^3 x^2+\sum xy\,\alpha\beta(\alpha+\beta) = k^3,$$

înlocuind pe x, y, z cu valorile lor găsim:

$$k^3=k^2\sum \alpha \frac{(k-\beta)^2(k-\gamma)^2}{(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2} + k^2\sum(\alpha+\beta)\frac{(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)^2}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)^2}$$

sau:

$$(7)\quad \sum \alpha \frac{(k-\beta)^2(k-\gamma)^2}{(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2} + \frac{(k-\alpha)(k-\beta)(k-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\sum \frac{(\alpha+\beta)(k-\gamma)}{\alpha-\beta} = k.$$

Adunând cele trei ecuații ale sistemului dat avem

$$\sum(\alpha+\alpha^2+\alpha^3)x = k+k^2+k^3 \qquad \text{sau:}$$

$$(8)\quad \sum(1+\alpha+\alpha^2)\frac{(k-\beta)(k-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} = 1+k+k^2$$

Inlocuind în (5) pe k cu $(\alpha+\beta+\gamma)$, obținem:

$$(9)\quad \sum \frac{\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} = \alpha+\beta+\gamma.$$

Facem $k=\alpha+\beta+\gamma$ în (6) și avem:

$$(10)\qquad \sum \alpha^2 \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=(\alpha+\beta+\gamma)^2.$$

Facem $k=\alpha+\beta+\gamma$ în (7), avem:

$$(11)\qquad \sum \alpha \frac{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\gamma)^2}{(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2}$$

$$+\frac{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\sum\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta+\gamma.$$

Facem $k=\alpha+\beta+\gamma$ în (8):

$$(12)\qquad \sum(1+\alpha+\alpha^2)\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

$$=(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha+\beta+\gamma)+1.$$

In identitatea

$$\sum\frac{bc}{(a-b)(a-c)}=1 \quad \text{facem} \quad a=\alpha(x-\alpha),\quad b=\beta(x-\beta),\quad c=\gamma(x-\gamma),$$

și obținem:

$$(13)\qquad \sum\frac{\beta\gamma(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(x-\alpha-\beta)(x-\alpha-\gamma)}=1.$$

In aceiași identitate dacă înlocuim pe

$$a=\alpha(x+\alpha),\quad b=\beta(x+\beta),\quad c=\gamma(x+\gamma)$$

obținem:

$$(14)\qquad \sum\frac{\beta\gamma(x+\beta)(x+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(x+\alpha+\beta)(x+\alpha+\gamma)}=1.$$

In identitatea:

$$\frac{a^2b^2+c^2d^2}{(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)}+\frac{a^2c^2+b^2d^2}{(b-a)(b-c)(d-a)(d-c)}$$

$$+\frac{b^2c^2+a^2d^2}{(a-b)(a-c)(d-b)(d-c)}=1,$$

făcând $d=0$, obținem:

$$ab(a^3-b^3)+ac(c^3-a^3)+bc(b^3-c^3)=$$

$$(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca),$$

împărțind cu $(a-b)(b-c)(c-a)$ obținem identitatea:

$$(15)\qquad \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{(b-c)(c-a)}+\frac{bc(b^2+bc+c^2)}{(c-a)(a-b)}+$$

$$\frac{ac(a^2+ac+c^2)}{(a-b)(b-c)}=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca.$$

Tot în acea identitate făcând $d=1$, obținem:

$$(16)\qquad \sum\frac{b^2c^2+a^2}{(a-b)(a-c)(b-1)(c-1)}=1.$$

De asemenea făcând $d=-1$, avem:

$$(17)\qquad \sum\frac{b^2c^2+a^2}{(a-b)(a-c)(b+1)(c+1)}=1.$$

In identitatea (13) făcând $x=\alpha+\beta+\gamma$ avem:

$$(18)\qquad \sum\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=1.$$

Făcând aci $\alpha+\beta=c$, $\beta+\gamma=a$, $\gamma+\alpha=b$ obținem

$$\sum\frac{bc}{(a-b)(a-c)}=1,$$

făcând $\alpha+\beta=\frac{1}{c}$, $\beta+\gamma=\frac{1}{b}$, $\gamma+\alpha=\frac{1}{a}$,

căpătăm $\sum\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$, adunându-le avem:

$$(19)\qquad \sum\frac{a^2+bc}{(a-b)(a-c)}=1,$$

tot așa obținem:

$$(20)\qquad \sum\frac{ma^2+nbc}{(a-b)(a-c)}=m+n.$$

Tot în (18) înlocuind pe α, β, γ respectiv prin $(b+c)$, $(c+a)$, $(a+b)$ căpătăm identitatea:

$$(21)\qquad \sum\frac{(a+b+2c)(a+c+2b)}{(a-b)(a-c)}=1,$$

făcând tot în (18) $\alpha=\frac{b+c}{a}$, $\beta=\frac{a+c}{b}$, $\gamma=\frac{b+a}{c}$

găsim:

$$\sum\frac{(a^2+b^2+ac+bc)(a^2+c^2+ab+cb)}{(a^2-b^2+ac-bc)(a^2-c^2+ab-cb)}=1,$$

sau:

$$(22)\qquad \sum\frac{[a^2+b^2+c(a+b)][a^2+c^2+b(a+c)]}{(a-b)(a-c)}$$

$$=(a+b+c)^2.$$

Făcând tot în (18) $\alpha=a+\frac{x}{2}$, $\beta=b+\frac{x}{2}$, $\gamma=c+\frac{x}{2}$ găsim:

$$(23)\qquad \sum\frac{(a+b+x)(a+c+x)}{(a-b)(a-c)}=1,$$

făcând aci $x=-\frac{a+b+c}{2}$ găsim:

$$(24)\qquad \sum\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{(a-b)(a-c)}=4.$$

Inlocuind în (18) $\alpha=b+c+\frac{x}{2}$, $\beta=a+c+\frac{x}{2}\ldots$ avem:

$$(25)\qquad \sum\frac{(a+b+2c+x)(a+c+2b+x)}{(a-b)(a-c)}=1.$$

In (23) înlocuim pe x prin $(a+b+c+x)$ şi găsim:

$$(26)\qquad \sum\frac{(2a+2b+c+x)(2a+2c+b+x)}{(a-b)(a-c)}=1.$$

Identitatea (13) pentru $x=0$ devine:

$$(27)\qquad \sum\frac{\beta^2\gamma^2(\beta+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$$

Inlocuind în această identitate pe α, β, γ respectiv prin $\frac{b+c-a}{2}$, $\frac{c+a-b}{2}$, $\frac{a+b-c}{2}$ găsim:

$$(28)\qquad \sum\frac{a(a+b-c)^2(a+c-b)^2}{(a-b)(a-c)}=16abc.$$

Făcând în (5) $k=\alpha\beta\gamma$ avem:

$$\sum\frac{\alpha(\alpha\beta\gamma-\beta)(\alpha\beta\gamma-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=\alpha\beta\gamma \qquad \text{sau:}$$

$$(29)\qquad \sum\frac{(\alpha\beta-1)(\alpha\gamma-1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=1.$$

Făcând în (6) $k=\alpha\beta\gamma$ obţinem:

$$\sum\alpha^2\frac{(\alpha\beta\gamma-\beta)(\alpha\beta\gamma-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=(\alpha\beta\gamma)^2,$$

sau simplificând cu $\alpha\beta\gamma$:

$$(30)\qquad \sum\frac{\alpha(\alpha\beta-1)(\alpha\gamma-1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=\alpha\beta\gamma.$$

Făcând în (8) $k=\alpha\beta\gamma$ avem:

$$(31)\qquad \sum\beta\gamma(1+\alpha+\alpha^3)\frac{(\alpha\beta-1)(\alpha\gamma-1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=1+\alpha\beta\gamma+\alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

Făcând $k=1$ în (5), (6), (8), obţinem:

$$(32)\qquad \sum\frac{\alpha(\beta-1)(\gamma-1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=1$$

$$(33)\qquad \sum\frac{\alpha^2(\beta-1)(\gamma-1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=1$$

$$(34)\qquad \sum(1+\alpha+\alpha^2)\frac{\beta-1)(\gamma-1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=3.$$

Făcând $k=0$ în (8) avem:

$$(35)\qquad \sum\frac{\beta\gamma(1+\alpha+\alpha^2)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=1.$$

Făcând $k=-1$ în (5), (6), (8) avem:

$$(36)\qquad \sum\frac{\alpha(\beta+1)(\gamma+1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=-1$$

$$(37)\qquad \sum\frac{\alpha^2(\beta+1)(\gamma+1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=1$$

$$(38)\qquad \sum\frac{(1+\alpha+\alpha^2)(\beta+1)(\gamma+1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=1.$$

Derivând relaţiile (5), (6) şi (8) în raport cu k. obţinem:

$$\sum\frac{\alpha(2k-\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=1 \qquad \sum\frac{\alpha^2(2k-\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=2k$$

$$\sum\frac{(1+\alpha+\alpha^2)(2k-\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=1+2k,$$

punând $2k=x$ obţinem:

$$(39)\ \sum\frac{\alpha(x-\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=1 \quad (40)\ \sum\frac{\alpha^2(x-\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=x$$

$$(41)\qquad \sum\frac{(1+\alpha+\alpha^2)(x-\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=1+x,$$

făcând $x=0$ în (40) şi (41) avem:

$$(42)\qquad \sum\frac{\alpha^2(\beta+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=0$$

$$(43)\qquad \sum\frac{(1+\alpha+\alpha^2)(\beta+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=-1,$$

făcând $x=\alpha+\beta+\gamma$ în (40) şi (41) obţinem;

$$(44)\qquad \sum\frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=\alpha+\beta+\gamma$$

$$\sum\frac{(1+\alpha+\alpha^2)\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=\alpha+\beta+\gamma+1.$$

Scăzând (5) din (6) găsim:

$$(45)\qquad \sum\alpha(\alpha-1)\frac{(k-\beta)(k-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=k(k-1).$$

Facem aci $k=\alpha+\beta+\gamma$ şi avem:

$$(46)\qquad \sum(\alpha-1)\alpha\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma-1),$$

făcând $k=\alpha\beta\gamma$ avem

$$(47)\qquad \sum\frac{(\alpha-1)(\alpha\beta+1)(\alpha\gamma-1)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=\alpha\beta\gamma-1.$$

Dacă în idenitatea:

$$(x+y+z)^5-(x+y-z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5$$
$$=80xyz(x^2+y^2+z^2),$$

facem $x=a-b$, $y=b-c$, $z=c-a$ obţinem:

$$(48)\qquad (a-b)^5+(b-c)^5+(c-a)^5=$$
$$10(a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

In felul acesta se pot obţine foarte multe identităţi numai folosind calculele simple de algebră. Identităţile pe cari le-am stabilit mai sus cuprind numai trei variabile, se pot stabili identităţi urmând căi analoage cu cele din prezentul articol şi cari să cuprindă patru sau mai multe variabile.

NOTE MATEMATICE

6. Asupra articolului: *Discuţiunea rădăcinilor unei ecuaţii de gradul al doilea.* In acest articol [1] d-l *N. Abramescu* stabileşte rezultate foarte interesante asupra discuţiunii ecuaţiei de gr. II.

Voi căuta să dau o formă remarcabilă, uşoară de reţinut şi calculat.

Dându-se ecuaţia $f(x)=Ax^2+Bx+C=0$, să facem transformata în $y=x-a$. Avem:

1) R. M. T., anul IV, No. 11.

$$\varphi(y)=f(y+a)=A(y+a)^2+B(y+a)+C.$$

De unde:

$$\varphi(y)=Ay^2+(2aA+B)y+Aa^2+Ba+C=0.$$

Observăm însă, că:

$$f'(x)=2Ax+B,\quad f(x)=Ax^2+Bx+C.$$

deci:

$$f(a)=Aa^2+Ba+C,\text{ iar }f'(a)=2Aa+B.$$

Atunci:

$$\varphi(y)=Ay^2+f'(a)y+f(a)=0.$$

Acum putem scrie referindu-mă la notaţiile din articolul citat:

$$(6)\qquad \frac{f(a)}{A}>0\,;\quad -\frac{f'(a)}{A}<0.$$

$$(8)\qquad Af(a)<0$$

$$(9)\qquad \frac{f(a)}{A}>0\,;\quad -\frac{f'(a)}{A}<0.$$

$f(x)=Ax^2+Bx+C$, deci $f(b)=Ab^2+Bb+C$ şi atunci avem:

$$(10)\qquad Af(a)<0\,;\quad Af(b)<b.$$

Făcând transformata: $y=\frac{x-a}{x-b}$ obţinem:

$$F(y)=(Ab^2+Bb+C)y^2-(2Aab+Ba+Bb+2C)y$$
$$+Aa^2+Ba+C=0.$$

Observăm că:

$$f'(x)=2Ax+B\,;\quad f'(b)=2Ab+B,$$

şi $f'(a)f'(b)=(2Aa+B)(2Ab+B)=4A^2ab+2ABb+2ABa+B^2$. De aci deducem:

$$\frac{f'(a)f'(b)}{2A}=2Aab+Ba+Bb+\frac{B^2}{2A},$$

iar adunând şi scăzând $2C$ găsim în fine:

$$2Aab+Ba+Bb+2C=\frac{f'(a).f'(b)}{2A}-\frac{B^2-4AC}{2A}$$

Dar B^2-4AC este realizantul lui $f(x)$ deci forma găsită este remarcabilă.

Avem deci formula:

$$12)\qquad \frac{f(a)}{f(b)}>0,\ \frac{f'(a).f'(b)-(B^2-4AC)}{2A}<0.$$

Apoi:

(13) $A \cdot f(a) < 0 ; \quad \frac{f(b)}{A} > 0 ; \quad -\frac{f'(b)}{A} < 0.$

Deci aceste rezultate concentrate în tablou, dau

ţinând seamă că dacă $\frac{\alpha}{\beta} < 0$ şi $\alpha\beta < 0$ iar dacă $\frac{\alpha}{\beta} < 0$ şi $\alpha\beta > 0$. Dacă $x' < x''$ vom avea:

Supoziţia	Condiţia
$x' < x'' < a$	$A f(a) > 0 ; \; A f'(a) \geq 0$
$x' < a < x''$	$A f(a) < 0$
$a < x' < x''$	$A f(a) > 0 ; \; A f'(a) < 0$
$x' < a < b < x''$	$A f(a) < 0 ; \; A f'(b) < 0$
$a < x' < x'' < b$	$f(a) f(b) > 0 ; \; A[f'(a) f'(b) - (B^2 - 4AC)] < 0$
$x' < a < x'' < b$	$A f(a < 0 ; \; A f(b) > 0 ; \; A f'(b) > 0.$

N. Teodorescu
elev cl. VI-a „lic. Sp. Haret"

7. *Asupra calculării discriminantului ecuaţiei de gr. III.*

Să considerăm ecuaţiile trinoame:

(1) $$\begin{aligned} x^m + p x^n + q &= 0 \\ x^m + p_1 x^n + q_1 &= 0 \end{aligned} \qquad m > n.$$

Putem calcula eliminantul lor astfel. Punem:

(2) $$x^m = \frac{\alpha}{\gamma} \quad x^n = \frac{\beta}{\gamma}.$$

Presupunând că (1) au o rădăcină comună putem substitui valorile (2) şi obţinem sistemul:

$$\alpha + p\beta + q\gamma = 0$$
$$\alpha + p_1\beta + q_1\gamma = 0,$$

care ne dă imediat:

(3) $$\frac{\alpha}{pq_1 - p_1 q} = \frac{\beta}{q - q_1} = \frac{\gamma}{p_1 - p}.$$

Dar din (2) scoatem:

$$\frac{\alpha^n}{\gamma^n} = \frac{\beta^m}{\gamma^m} \qquad \alpha^n \gamma^{m-n} - \beta^m = 0,$$

şi după (3).

(4) $$(pq_1 - p_1 q)^n (p_1 - p)^{m-n} - (q - q_1)^m = 0.$$

Cazul particular $m = 2$, $n = 1$, a fost tratat de d-l *Stoenescu I. A.*, în *Jurnal Matematic*, vol. I, pag. 30.

Cu ajutorul celor stabilite se poate găsi condiţia ca ecuaţia:

$$x^m + p x^n + q = 0 \qquad q \neq 0$$

să admită o rădăcină dublă. Trebue ca ea să aibe o rădăcină comună cu derivata ei, care se poate scrie:

$$x^m + \frac{n}{m} \cdot p x^{-n} + 0 = 0$$

şi condiţia se va obţine din (4) făcând $\frac{n}{m} p = p_1$, $q_1 = 0$, obţinem:

$$\left(-\frac{n}{m} p \cdot q\right)^n \left\{p \frac{n-m}{m}\right\}^{m-n} - q^m = 0,$$

sau:

$$(-n)^n \frac{p^m}{m^m} - \frac{q^{m-n}}{(n-m)^{m-n}} = 0.$$

Deci ecuaţia:

$$x^3 + p x + q = 0,$$

va avea o rădăcină dublă când:

$$\frac{p^3}{3^3} + \frac{q^2}{2^2} = 0.$$

Tiberiu Popovici
student

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Examenul de fine de an

1 Iunie 1925.

Lucrare scrisă de Geometrie Analitică, anul I

I

a). Fie A şi B două puncte fixe pe axele dreptunghiulare Ox şi Oy iar M un punct mobil pe AB. Se proiectează M în P pe OA şi în R pe OB. Se cere locul focarelor hiperbolelor echilatere circumscrise dreptunghiului OPMR.

b). Să se demonstreze că perpendiculara dusă din focarul unei parabole pe o coardă a acestei parabole, se întâlneşte cu diametrul conjugat coardei în un punct de pe directoară.

c). Să se scrie ecuaţia redusă a cuadricei

$$2x^2 - 23y^2 + 4xy + 6yz - 4y - 1 = 0$$

şi să i se găsească axele.

II

a). Pe axa Ox se ia un punct fix A iar pe Oy un punct mobil B. Se cere locul focarelor parabolelor tangente în A la Ox şi în B la Oy.

b). Se dă o parabolă cu focarul în F şi cu vârful în O. O secantă ce trece prin F taie parabola în A şi B. Perpendiculara în M, mijlocul lui AB taie axa OF în I. Să se arate că

$$2.OI = FA + FB.$$

c). Să se scrie ecuaţia redusă a cuadricei

$$20x^2 + 2z^2 - 8xy + 14xz + 2yz + 1 = 0$$

şi să i se găsească axele.

III

a). Pe axa Ox se consideră un punct fix A. Se cere locul focarelor hiperbolelor echilatere care trec prin A şi au axa Oy ca directoare.

b). Fie AB un diametru fix al unei hiperbole echilatere şi M un punct pe hiperbolă. Să se arate că dreptele MA şi MB sunt egal înclinate pe asimptotele hiperbolei.

c). Să se scrie ecuaţia redusă a cuadricei:

$$x^2 - y^2 + 5z^2 + 6xz + 4yz + 2x + 2y + 2z = 0$$

şi să i se găsească axele.

IV

a). Pe una din bisectoarele axelor unei elipse se consideră un punct P prin care se duce o paralelă la cealaltă bisectoare. Se cere locul focarelor parabolelor care trec prin intersecţia elipsei cu cele 2 drepte perpendiculare ce trec prin P, când P se mişcă pe bisectoarea OP.

b). Fie OA şi OB doi diametri conjugaţi ai unei elipse. Normalele în A şi B la elipsă se întâlnesc în N. Să se arate că ON este perpendiculară pe AB.

c). Să se scrie ecuaţia redusă a cuadricei

$$x^2 - 3y^2 + 3z^2 - 2xy - 4xz + 8yz - 8z + 6y + 2x = 0$$

şi să i se găsească axele.

Lucrare scrisă de analiză, anul I

24 Iunie 1925

1. Să se calculeze integrala:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^6 2t}{\sin^4 t}\, dt.$$

2. Să se arate că expresiunea:

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{y}{1+x^2y^2}\right)dx + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} - \frac{x}{y^2}\right)dy,$$

este o diferenţială totală exactă şi să se integreze.

3. Să se calculeze aria de deasupra axei x-lor, cuprinsă între arcele de curbă:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \\ y^2 = 2x. \end{cases}$$

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXX, No. 10, Iunie 1925. Problema simultaneităţii, de *G. Zapan.* Patrate decapitate (urmare şi sfârşit), de *Emil Ştefănescu.* Premiile „G. M." pentru concursul ţinut în anul 1924, de † *A. Saligny, G. Filipescu, G. Borneanu.*

2. *Foaia Matematică*, anul II, No. 6, Iunie 1925. Asupra calculului aproximativ, de *Căpitan I. Linteş.*

3. *Jurnal Matematic*, vol. II, Mai 1925, de *Tiberiu Popovici.* O generalizare a funcţiunii *Gamma*, de *Tib. Popovici.* Asupra şirurilor recurente liniare, de *E. Ştefănescu* Asupra funcţiunii exponenţiale, de *Tib. Popovici.*

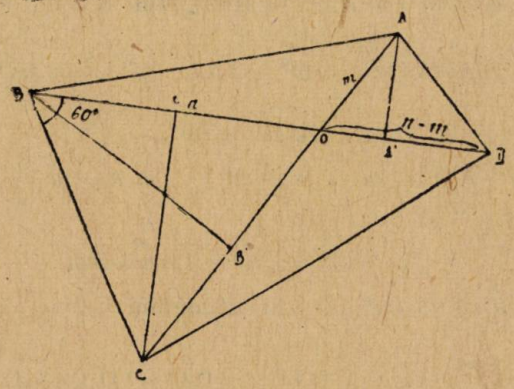
4. *Insemnări matematice*, anul I, No. 5, Mai 1925. Cercuri remarcabile ale unui triunghiu, de *Angelo Ionescu* şi *Petru Spacu.*

5. *Curierul Matematic*, vol. I, No. 4, Iunie 1925. O clasă de polinoame ortogonale, de *M. Ghermănescu.* Asupra formulei binomului şi a factorialei, de *T. Topovici.* Aplicaţii alei unei ecuaţii cu toate rădăcinele reale, de *E. Ştefănescu.*

PROBLEME REZOLVATE

341. — *Să se calculeze laturile patrulaterului* ABCD, *cunoscând:* $\overline{OA} = m$, $\overline{OB} = n$, $\overline{OC} = n$, $\overline{OD} = n - m$ *şi* $\sphericalangle OBC = 60^0$, O *fiind punctul de intersecţie al diagonalelor.*

STANCIULESCU DAN



Soluție geometrică dată de d-nii: *Avram Iorgu* (lic. Bacău), *Beju Traian* (lic. Arad), *Braeșter I. Otto* (lic. Național, Iași), *Cligher A.* (Șc. Polit. Timișoara), *Cosma Z. Gheorghe* (lic. Cantemir, București), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Goldstein N.* (Șc. Polit. Timișoara), *Grigore Virgil* (lic. Tg.-Jiu), *Iscovici Paul* (lic. Pitești), *Motaș C.* (București), *Milner I.* (Edineți) și *Tunaru R. Traian* (lic. Craiova).

Calculul lui BC. Triunghiul OBC având $\overline{OB} = \overline{OC} = n$ și $\sphericalangle OBC = 60^0$, este echilateral, deci $\overline{BC} = n$.

Calculul lui AB. Ducem $\overline{BB'}$ înălțime în triunghiul echilateral BCO, avem:

$$\overline{BB'}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CB'}^2 = n^2 - \frac{n^2}{4} = \frac{3n^2}{4}$$

apoi:

$$\overline{AB'} = m + \frac{n}{2} = \frac{2m+n}{2}$$

Din triunghiul dreptunghic AB'B, avem:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{BB'}^2 = \frac{(2m+n)^2}{4} + \frac{3n^2}{4} = m^2 + mn + n^2$$

$$\therefore \quad \overline{AB} = \sqrt{m^2 + mn + n^2}$$

Calculul lui AD. Ducem $\overline{AA'}$ perpendiculara pe BD; $\sphericalangle AOA' = 60^0$, deci în triunghiul dreptunghic AA'O:

$$\overline{OA'} = \frac{\overline{OA}}{2} = \frac{m}{2},$$

apoi:

$$\overline{AA'}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OA'}^2 = m^2 - \frac{m^2}{2} = \frac{3m^2}{4},$$

și:

$$\overline{A'D} = \overline{OD} - \overline{OA'} = n - m - \frac{m}{2} = \frac{2n-3m}{2}$$

Din triunghiul dreptunghic AA'D, avem:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AA'}^2 + \overline{A'D}^2 = \frac{3m^2}{4} + \frac{(2n-3m)^2}{3} = n^2 - 3mn + 3m^2,$$

$$\therefore \quad \overline{AD} = \sqrt{n^2 - 3mn + 3m^2}$$

Calculul lui CD. Ducem $\overline{CC'}$ înălțime în triunghiul echilateral BCO, avem:

$$\overline{CC'} = \overline{BB'} = \frac{3n^2}{4},$$

apoi:

$$\overline{DC'} = \overline{OD} + \overline{OC'} = n - m + \frac{n}{2} = \frac{3n-2m}{2}$$

Din triunghiul dreptunghic CC'D, avem:

$$\overline{CD}^2 = \overline{CC'}^2 + \overline{DC'}^2 = \frac{3n^2}{4} + \frac{(3n-2m)^2}{4} = m^2 - 3mn + 3n^2,$$

$$\therefore \quad \overline{CD} = \sqrt{m^2 - 3mn + 3n^2}$$

Altă soluție geometrică. BC se calculează ca mai sus.

Calculul lui AB. Aplicăm teorema lui *Stewart* triunghiului ABC, avem:

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{OC} + \overline{BC}^2 \cdot \overline{OA} - \overline{OB}^2 \cdot \overline{AC} = \overline{OC} \cdot \overline{OA} \cdot \overline{AC}$$

sau:

$$\overline{AB}^2 . n + n^2 . m - n^2 (m+n) = n . m . (m+n),$$

$$\therefore \quad AB = \sqrt{m^2 + mn + n^2}$$

Calculul lui AD. Teorema lui *Stewart* aplicată triunghiului BAD, ne dă:

$$\overline{AD}^2 \cdot \overline{OB} + \overline{AB}^2 \cdot \overline{OD} - \overline{AO}^2 \cdot \overline{BD} = \overline{OB} \cdot \overline{OD} \cdot \overline{BD}$$

sau:

$$\overline{AD}^2 \cdot n + (m^3 + mn + n^2)(n - m) - m^3 \cdot (2n - m) = n(n - m)(2n - m),$$

$$\overline{AD} = \sqrt{n^2 - 3mn + 3m^2}$$

Calculul lui CD. Teorema lui *Stewart* aplicată triunghiului CDB, ne dă:

$$\overline{CD}^2 \cdot \overline{OB} + \overline{BC}^2 \cdot \overline{OD} - \overline{OC}^2 \cdot \overline{BD} = \overline{OB} \cdot \overline{OD} \cdot \overline{BD}$$

sau:

$$\overline{CD}^2 \cdot n + n^2(n - m) - n^2(2n - m) = n(n - m)(2n - m)$$

$$\therefore \quad \overline{DC} = \sqrt{m^2 - 3mn + 3n^2}$$

Soluții analoage date de d-nii: *Angelescu N.* (lic. Giurgiu), *Bejenică Nicu* (lic. Brașov), *Beșchea N.* (lic. Brașov), *Bruda Nicola* (lic. Făgăraș), *Corșoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Florescu M. Octav* (lic. Caracal), *Frătici Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Frumușelu Gh.* (lic. Brașov), *I. N. Georgescu-Val* (Dadilov), *Ghelber Mauriciu* (Semin. Pedag. București), *Ionescu Angelo* (lic Cluj), *Ionescu Anton* (lic. Milit. Craiova), *Ionescu I. Nicu* (lic. Pitești), *Miu M. Ioan* (lic. Caracal), *Popa-Petrescu Niculae* (lic. Brașov), *Popovici Aurel* (lic. Focșani), *Popovici Th. Ion* (Șc. Polit. București), *Purdilă C.* (lic. Brașov), *Reșnoveanu Emil* (lic. Brașov), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Stamatescu I. Valeriu* (Semin. Pedag. București), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Vasiliu N. Șt.* și *Velea Gr. Mihail* (lic. Milit. Craiova).

Soluție trigonometrică. BC se calculează ca în prima soluție.

Calculul lui AB. In triunghiul AOB, putem scrie:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 - 2\,\overline{AO} \cdot \overline{OB} \cos \widehat{AOB},$$

$$\widehat{AOB} = 120,$$

sau: $$\overline{AB}^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \overline{AB} = \sqrt{m^2 + mn + n^2}$$

Calculul lui AD. In triunghiul AOD, avem:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OD}^2 - 2\,\overline{AO} \cdot \overline{OD} \cdot \cos \widehat{AOD},$$

$$\widehat{AOD} = 60^0,$$

sau: $$\overline{AD}^2 = m^2 + (n - m)^2 - 2m(n - m)\,\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \overline{AD} = \sqrt{n^2 - 3mn + 3m^2}$$

Calculul lui CD. In triunghiul COD, avem:

$$\overline{CD}^2 = \overline{CO}^2 + \overline{OD}^2 - 2\,\overline{CO} \cdot \overline{OD} \cos \widehat{COD},$$

$$\widehat{COD} = 120^0,$$

sau: $$\overline{CD}^2 = n^2 + (n - m)^2 - 2n(n - m) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \overline{CD} = \sqrt{m^2 - 3mn + 3n^2}$$

Soluții analoage date de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Ardelea Radu* (lic. Milit. Craiova), *Beldie N. D-tru* (R.-Sărat), *Bernardis Berardo* (Șc. Polit. Timișoara), *Botea G. N.* (lic. Cantemir, București), *Bruda N.* (lic. Făgăraș), *Caracaș I. Gh.* (lic. Botoșani), *Căldăraru Leon* (lic. Șincai, București), *Chinie Mihail* (lic. Pitești), *Chirilă Ion* (lic. Internat, Iași), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Comănescu-Bălteni Al., Constantinescu D. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Corșoreanu Gh. Gheorghe* (Tg.-Jiu), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dimitrescu A. Mihail* (lic. Roman), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Florea C. Alex.* (lic. Internat, Iași), *Florescu Gh. Oprea* (Craiova), *Gavrilescu Ion* (lic. Ploești), *Gârleșteanu Mihail* (Șc. Polit., Timișoara), *Gradiny I. Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Grofșoreanu I. Gheorghe* (lic. Lugoj), *Grubenmann I. Gr.* (lic. Cantemir, București), *Iacob Șt. Eug.* (lic. Botoșani), *Ioachim Grigore* (lic. Milit., Iași), *Ionică Ion* (lic. Brașov), *Ionescu Th. Andrei-Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu V. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Iscovici Paul* (lic. Pitești), *Lateș I. Vasile* (Semin. Pedag., Iași), *Lăzărescu M. Vasile* (Giurgiu), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iași), *Manoil Adolf* (lic. Roman), *Marcovici H.* (lic. Botoșani), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Milculescu G. D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Nicolau C-tin* (lic. R.-Sărat), *Passko Wihelm* (București), *Placa Mircea* (lic. Botoșani), *Podeanu Aurel* (Pitești), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Pop Iulian* (lic. Cluj), *Popescu N. Nicu* (lic. Câmpina), *Rauchbach Arthur* (lic. Gura-Humorului, Bucovina), *Râmniceanu Radu* (lic. Tg.-Jiu), *Schmautz Al. Gh.*, *Șerban Tiberiu* (Șc. Polit. Timișoara), *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Spârchez Zeno* (Șc. Polit. Timișoara), *Staicu Irimie* (lic. Brașov), *Ștefănescu Emil, Stoica N. Aureliu* (București), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Țânțăreanu P.* (lic. Sf. Sava, București), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, București), *Vasiliu Gh.* (lic. Timișoara), *Vasiliu C. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Velea Gr. Mihail* (lic. Milit. Craiova), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov), *Vulpanovici Boris* (lic. Chișinău), *Wallechner Emil* (Govora), *Zamfirescu Alex.* (Pitești) și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Pitești).

353. — *Să se găsească un cub perfect de patru cifre astfel ca prima cifră să fie diferența între a treia și a patra, numărul format de primele două cifre să fie multiplul ultimei cifre și suma cifrelor cubului cerut să fie un număr prim:*

I. GEORGESCU

Fie $abcd = N^3$ cubul cerut, atunci:

$$1000 \leq N^3 < 10000$$

$$\text{sau} \quad 10^3 \leq N^3 < 22^3$$

Rezultă că $abcd$ este printre numerile:

1000, 1331, 1728, 2197, 2744, 3375,

4096, 4913, 5832, 6859, 8000, 9261,

Dintre acestea, numai numerile:

1000, 2197, 2744, 4096, 4913,

implinesc condiția că suma cifrelor lor ne dă un număr prim, iar dintre acestea numai 2197, satisface condiția:

$$a = c - d.$$

Acest număr satisface și ultima condiție:

$$ab = \text{mult. } d.$$

Numărul 2197 este deci soluția problemei.

Observare. Dintre condițiile:

$$a = c - d, \quad ab = \text{mult. } d,$$

una ar putea să lipsească.

Soluții date de d-nii; *Agapescu M. Nicolai* (Semin. Ped. Iași), *Ardelea Radu* (Sinaia), *Beju T.* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Botea N.* (București), *Braiester I. Otto* (lic. Național, Iași), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Chirilă Ion* (lic. Internat, Iași), *Comănescu Al.-Bălteni, Constantinescu Mihail* (lic. Cantemir, București), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dimitrescu A. Mișu* (lic. Roman), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Fărcășanu Gh. Mihail* (lic. R.-Vâlcea), *Fischer M. I.* (lic. Bacău), *Gavrilescu Ion* (lic. Ploești), *Gârleșteanu Mihail* (Tlmișoara), *I. N. Georgescu-Val., Grofșoreanu I Gheorghe* (lic. Lugoj), *Grubenman I. Gr.* (lic. Cantemir, București), *Iacob St. Eugen* (lic. Botoșani), *Iliescu M.* (lic. M-rea Dealu), *Iliescu St. Virgil* (lic. Milit., Tg.-Mureș), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu I. Paul* (Amărăștii-de-Jos), *Istinie I. C. Brezuică* (lic. Caracal), *Istinie. I. C-tin* (lic. Caracal), *Katz Lazăr* (lic. Botoșani), *Manoil A.* (Roman), *Marcovici M. Mauriciu* (lic. Botoșani), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Milner I.* (Edinți), *Miu M. Ioan* (lic. Caracal), *Motaș C.* (București), *Nedelcu Gh. Ilie* (lic. Giurgiu), *Neacșu Gh. Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Percea Viorel* (Șc. Polit., Timișoara), *Petrescu St. Alexandru-Dan* (lic. Milit., Craiova), *Podeanu Aurel* (lic. Pitești), *Popescu T. Alexandru* (Giurgiu), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici Aurel* (lic. Focșani), *Popovici Th. Ion* (Șc. Polit., București), *Purdilă C-tin* (lic. Brașov), *Rapaport A.* (lic. Botoșani), *Roșu A. Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Scripcă Valentin* (Giurgiu), *Șerban Tiberiu* (lic. Zărnești), *Simionescu D. Gh., Spârchez Zeno* (Șc. Polit. Timișoara). *Stoica N. Aurel* (lic. Cantemir, București), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureștti), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Tanovlci V. C-tin* (lic. Ploești), *Vasilescu B.* (lic. Sf. Sava, București), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timișoara), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov) și *Vulpanovici Boris* (lic. Chișinău),

In ultimul timp s'au primit solutii dela d-nii: *Frumușetu H. Gheorghe* (lic. Brașov) și *Surugiu Vasile* (lic. M-rea Dealu).

426. *Să se stabilească identitatea;*

$$\begin{vmatrix} \alpha & a & 1 \\ \beta & b & 1 \\ \gamma & c & 1 \end{vmatrix} s_2 + \begin{vmatrix} a^2 & \alpha & 1 \\ b^2 & \beta & 1 \\ c^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} s_1 + 3 \begin{vmatrix} a^2 & a & \alpha \\ b^2 & b & \beta \\ c^2 & c & \gamma \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha + \beta + \gamma)(a - b)(a - c)(b - c),$$

unde: $s_1 = a + b + c$, $s_2 = a^2 + b^2 + c^2$.

V. ALACI

Soluție dată de d-nii: *Braester Otto* (lic. Național, Iași), *Frătici I.* (Șc. Polit., Timișoara), *Gârleșteanu Mihail* (Șc. Polit., Timișoara) și *Iacob St. Eugen* (lic. Botoșani).

Insemnând cu A primul membru și dezvoltând putem scri succesiv:

$$A = \alpha s_3 (b - c) - \beta s_2 (a - c) + \gamma s_2 (a - b)$$

$$- \alpha s_1 (b - c)(b + c) + \beta s_1 (a - c)(a + c)$$

$$- \gamma s_1 (a - b)(a + b) + 3\alpha b c (b - c) - 3\beta a c (a - c)$$

$$+ 3\gamma a b (a - b) = \alpha (b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - a b - b^2$$

$$- b c - a c - b c - c^2 + 3 b c) + \beta (a - c)(- a^2 - b^2 -$$

$$c^2 + a^2 + a b + a c + a c + b c + c^2 - 3 a c) + \gamma (a - c)(a^2$$

$$+ b^2 + c^2 - a^2 - a b - a c - a b - b^2 - b c + 3 b c)$$

$$= \alpha (b - c)(a^2 - a b - a c + b c) + \beta (a - c)(- b^2 + a b$$

$$+ b c - a c) + \gamma (a - b)(c^2 - a b - b c + a c)$$

$$= \alpha (b - c)(a - b)(a - c) + \beta (a - c)(a - b)(b - c)$$

$$+ \gamma (a - b)(a - c)(b - c) = (\alpha + \beta + \gamma)(a - b)(a - c)(b - c)$$

tocmai ceiace trebuia dovedit.

Soluția a 2-a dată de: *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Ghinicescu I. Gh.* (lic. Internat, Iași), *Ionescu Angelo* (lic. Cluj), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iași), *Marcovici H.* (lic. Botoșani), *Pop Iulian* (Cluj) și *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București).

Considerăm determinantul:

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_2 & s_1 & s_3 & 3 \\ a^2 & a & \alpha & 1 \\ b^2 & b & \beta & 1 \\ c^2 & c & \gamma & 1 \end{vmatrix},$$

unde $s_3 = \alpha + \beta + \gamma$, $3 = 1 + 1 + 1$. Elementele primei linii fiind fiecare compus din o sumă de trei termeni, acest determinant se descompune într'o sumă de trei determinanți, fiecare fiind nul ca având două linii egale,

Urmează deci că:

$$\Delta = 0$$

Dezvoltând pe Δ. avem:

$$(1)\quad s_2 \begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix} - s_1 \begin{vmatrix} a^2 & \alpha & 1 \\ b^2 & \beta & 1 \\ c^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix}$$

$$+(\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} a^2 & a & \alpha \\ b^2 & b & \beta \\ c^2 & c & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

In primul determinant inversând primele două coloane, apoi observând că al treilea determinant este un determinant *Vandermonde* ce se descompune în $(a-b)(a-c)(b-c)$. deducem din (1).

$$\begin{vmatrix} \alpha & a & 1 \\ \beta & b & 1 \\ \gamma & c & 1 \end{vmatrix} s_2 + \begin{vmatrix} a^2 & \alpha & 1 \\ b^2 & \beta & 1 \\ c^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} a^2 & a & \alpha \\ b^2 & b & \beta \\ c^2 & c & \gamma \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma)(a-b)(a-c)(b-c),$$

care este tocmai identitatea cerută.

Soluția a 3-a dată de d-nii: *Beldie N. D-tru* (R.-Sărat), *Chirilă Ion* (lic. Internat, Iași), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Gataiantu V. Barbu* (lic. Caracal), *Ioachim Grigore* (lic. Milit. Iași), *Marinescu S. D.* (Ploești), *Podariu Al.* (P.-Neamț), *Popovici P. Dan* (Chișinău), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Răpeanu N. Virgil* (lic. Internat, Iași), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Ulea C. Titus* (lic. Internat, Iași).

Vom folosi teorema (demonstrată în „R. M. T.", an. V, No. 1, pag. 5).

Dacă într'un determinant Vandermonde înlocuim elementele unei coloane cu niște cantități arbitrare și înmulțim determinantul astfel format, cu suma elementelor scoase și facem acest lucru pentru fiecare coloană, atunci suma produselor astfel obținute este egală cu suma cantităților arbitrare înmulțită cu determinantul dat.

Dacă:

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

este un determinant *Vandermonde* și α, β, γ niște cantități arbitrare, putem scrie în virtutea teoremei enunțate:

$$\begin{vmatrix} \alpha & a & 1 \\ \beta & b & 1 \\ \gamma & c & 1 \end{vmatrix} s_2 + \begin{vmatrix} a^2 & \alpha & 1 \\ b^2 & \beta & 1 \\ c^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix}$$

$$s_1 + 3 \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha+\beta+\gamma)(a-b)(a-c)(b-c),$$

tocmai identitatea cerută.

Observare. Au generalizat enunțul, prin metoda ce reiasă din soluția 2-a, d-nii: *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași) și *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București).

Alte soluții cu calcule mai multe, date de d-nii: *Ardelea Radu* [lic. Mil., Craiova], *Beju Tr.*, *Beșchea Nicolae* [lic. Brașov], *Boghiu Iosif* [lic. Brașov], *Costea Octavian* [lic. Brașov], *Dânga S. Vlad* [lic. Orheiu], *Drăgan D.* [lic. Brașov], *Fezi Gh.* [lic. Orheiu], *Gherbanowsky Nicolae* [lic. Orheiu], *Ianculescu Octavian* [Conductor de Mine], *Ionescu Th. C-tin Bujor* [lic. Cantemir, București], *Iscovici Paul* [lic. Pitești], *Lindenberg L.* [București], *Mareș Gr.* [lic. Ba-

cău], *Marineanu Traian* [lic. Timişoara], *Marinescu S. D.* [Ploeşti], *Maris Marius* [lic. Arad], *Neacşu Vasile* [lic. Braşov], *Neumann Maria* [Lugoj], *Novacu A. C. Valeriu* [lic. Arad], *Paszko Wilhelm* [Bucureşti], *Popa-Petrescu Nicolae* [lic. Braşov], *Placa Mircea* [lic. Botoşani], *Purdilă C-tin* [lic. Braşov], *Puşcă I. Toma* [lic. Internat, Iaşi], *Rădulescu Nicolae* [lic. Caracal], *Răpeanu Virgil* [lic. Internat, Iaşi], *Scripcă C. Laur* [Iaşi], *Şerban Aurel* [lic. Braşov], *Severin C. Marcel* [lic. Botoşani], *Spacu Gh. Petru* [Cluj], *Spârchez Zeno* [Şc. Polit., Timişoara], *Stănciulescu Dan* [lic. M-rea Dealu], *Teodorescu N.* [lic. Spiru Haret, Bucureşti], *Ţanovici V. C-tin* [Ploeşti], *Ulea C. Titus* [lic. Internat, Iaşi], *Vasilescu Bartolomeu* [lic. Sf. Sava, Bucureşti], *Vasilu Gh. Gheorghe* [lic. Timişoara], *Velea Mihail* [lic. Milit., Craiova], şi *Vlădea Ioan* [lic. Braşov].

In ultimul timp s'au primit soluţii dela d-nii: *Florea V. Gheorghe* [lic. Carol, Craiova], *Florescu M. Octavian* şi *Ionescu Th. Andrei Bujor* [lic. Cantemir, Bucureşti].

437. — *Să se stabilebscă relaţia:*

$$s = \frac{r^2}{2}\left(\frac{a+2c}{h_a} + \frac{b+2a}{h_b} + \frac{c+2b}{h_c}\right)$$

SUBLOCOT. I. M. IONITA

Folosim formulele şi notaţiile cunoscute:

$$h_a = \frac{2s}{a},\quad h_b = \frac{2s}{b},\quad h_c = \frac{2s}{c},$$

$$a+b+c = 2p,\quad pr = s,$$

şi însemnând cu A membrul al 2-lea, putem scri succesiv:

$$A = \frac{r^2}{2}\left(\frac{a^2+2ac}{2s} + \frac{b^2+2ab}{2s} + \frac{c^2+2bc}{2s}\right)$$

$$= \frac{r^2}{2}\left(\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{2s}\right)$$

$$= \frac{r^2(a+b+c)^2}{4s} = \frac{4p^2r^2}{4pr} = pr = s.$$

Relaţia este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Agarici Gr. D-tru* (lic. Milit., Iaşi), *Ardelea Radu* (lic. Milit, Craiova), *Băncilă Mircea* (lic. Braşov), *Beju Traian* (lic. Arad), *Beldie D-tru* (R.-Sărat), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Boambau Ioan* (lic. Braşov), *Boghiu Iosif* (lic. Braşov), *Braeşter Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Buda Cezar* (lic. Milit., Iaşi), *Caracaş I. Gh.* (lic. Botoşani), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Câlniceanu Gh. Gheorghe* (Tg.-Jiu), *Chirilă Ion* (lic. Internat, Iaşi), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Costea Octavian* (lic. Braşov), *Cuncic Alfons* (lic. Internat, Iaşi), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Daraban N. Paul* (Şc. Polit., Timişoara), *Dângă S. Vlad* (lic. Orheiu), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dimitrescu A. Mişu* (lic. Roman), *Dinescu Florin* (lic. Ploeşti), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Drăgan G.* (lic. Braşov), *Drăghici Aurelian* (Tg.-Jiu), *Duport George* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Enulescu Ovidiu* (lic, Chişinău), *Feinstein Herman* (lic. P.-Neamţ), *Frătici I.* (Şc. Polit., Timişoara), *Frumuşelu H. Gheorghe* (lic. Braşov), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gârleşteanu Mihail* (Şc. Polit. Timişoara), *Ghelber M.* (Sem. Ped., Bucureşti), *Gheorghiu Mircea* (lic. Tg.-Jiu), *Gherbanowsky F. Nicolae* (lic. Orhei), *Ghinicescu I. Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Grabowski Eugen* (lic. Orheiu), *Greavu I.* (lic. Tg.-Jiu), *Grigore Nicolae* (Învăţător, Ialomiţa), *Grigore T. Vir.* (lic. Tg.-Jiu), *Grubenmann I. Gr.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Gurjie* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Hacig Ioan* (lic. P.-Neamţ), *Handjief V.* (Şc. Polit., Timişoara), *Ianculescu Octavian* (Conductor de Mine), *Iacob Şt. Eug.* (lic. Botoşani), *Iliescu Şt. Virgil* (lic. Tg.-Mureş), *Ioachim Grigore* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu Angelo* (lic. Cluj), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu C. Nicolae* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Iscovici Paul* (lic. Piteşti), *Lepădatu I. Miclea* (Cahul), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Manoil Adolf* (Roman), *Manole Gheorghe* (lic. Braşov), *Mareş Grigore* (lic. Bacău), *Marinescu S. D.* (Ploeşti), *Mariş Marius* (lic. Arad), *Mihailescu Tasse* (lic. Braşov), *Moldoveanu Marin* (lic. Milit., Tg.-Mureş), *Morţun Emil* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Motaş C.* (Bucureşti), *Mozez A. Cernes* (lic. Naţional. Iaşi), *Neacşu Vasile* (lic. Braşov), *Nedelcu Ilie* (lic. Giurgiu), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Novacu A. C. Valeriu* (lic. Arad), *Olariu T. Enea* (Şc. Polit., Timişoara), *Patron Nicolae* (lic. Milit., Iaşi), *Pelin I. Ioan* (lic. Bacău), *Placa Mircea* (lic. Botoşani), *Podariu Alex.* (lic. P.-Neamţ), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Popa Iulian* (lic. Cluj), *Popa-Petrescu Nicolae* (lic. Braşov), *Popescu T. Alexandru* (lic. Giurgiu), *Popovici P. I. Dan* (Chişinău), *Predescu A. Nicolae* (lic. Caracal), *Prejbeanu I. Iulian* (lic. Tg.-Jiu), *Purdilă C-tin* (lic. Braşov), *Puşcă I. Toma* (lic. Internat, Iaşi), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Rădulescu Nicolae* (lic. Caracal), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Rătan I.* (lic. Braşov), *Reşnoveanu Emil* (lic. Braşov), *Rusanda Gheorghe* (lic. Arad), *Rucăreanu Nicolae* (Braşov). *Scripcă Valentin* (Giurgiu), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Schultz Pavel* (lic. Cluj), *Scripcă Laur* (Iaşi), *Spârchez Zeno* (Şc. Polit., Iaşi), *Stelian D-tru* (lic. Braşov), *Stoica N. Aureliu* (Bucureşti), *Stoica S. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Stroescu I. Gheorghe* (lic. Tg.-Mureş), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu C. C.* (lic. Tg.-Mureş). *Tunaru R. Traian* (lic. Carol, Craiova), *Ţanovici V. C-tin* (lic. Ploeşti), *Ulea Titus* (lic Internat, Iaşi), *Vasilescu B.* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Timişoara), *Văcăreanu A. Em.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Velea Gr. Mihail* (lic. Milit. Craiova), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov), *Vulpanovici Boris* (lic. Chişinău) şi *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina).

In ultimul timp s'au primit soluţii dela d-nii: *Constantinescu M. Mihail* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Faibovici I. Hervi* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Goldenzweig S. C. Leopold* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Katz Lazăr* (lic. Botoşani), *Mitzel A.* (lic. Cernăuţi) şi *Popovici Aurel* (lic. Focşani).

Soluţie dată de d-nii: *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Drogeanu N. Paul* (Semin. Pedag., Bucureşti) şi *Popescu Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti).

Pornim dela relaţia:

$$s = pr$$

$$\overset{*}{\ast}\overset{*}{\ast}\quad 4s^2 = 4p^2r^2.$$

De unde:

$$s=\frac{4p^2r^2}{4s}=\frac{r^2(a+b+c)^2}{4s}=\frac{r^2}{2}\left(\frac{a^2+2ac}{2s}+\frac{b^2+2ab}{2s}+\frac{c^2+2bc}{2s}\right)$$

$$=\frac{r^2}{2}\left(\frac{a+2c}{\frac{2s}{a}}+\frac{b+2a}{\frac{2s}{b}}+\frac{c+2b}{\frac{2s}{c}}\right)$$

Cum știm că: $\frac{2s}{a}=h_a,\ \frac{2s}{b}=h_b,\ \frac{2s}{c}=h_c,$ urmează:

$$s=\frac{r^2}{2}\left(\frac{a+2c}{h_a}+\frac{b+2a}{h_b}+\frac{c+2b}{h_k}\right)$$

care este relația cerută.

PROBLEME PROPUSE

463. — Să se arate că expresiunea:

$$E=6^{2n+1}+5^{n+2}$$

se divide cu 31.

MIHAI VASILIU

464. — Pentruce valori ale lui n fracțiunea $\frac{a}{5}$ este cuprinsă între $\sqrt{n}$ și $\sqrt{n+1}$?

LOCOT.-COL. GH BUICLIU

465. — Fie $B'C'$ o paralelă dusă la latura BC a unui triunghiu ABC. Să se arate că cercurile ABC și $AB'C'$ sunt tangente.

V. VALCOVICI

466. — Se dau două cercuri. Prin punctele lor de intersecție se duc două secante paralele, care formează un paralelogram cu vârfurile pe cele două cercuri. Se cere locul geometric al mijloacelor laturilor acestui paralelogram și al punctului de intersecție al diagonalelor lui, când secantele rămânând paralele, trec necontenit prin punctele de intersecție a cercurilor date.

GH. CONSTANTINESCU

467. — Dacă:

$$a+b+c=0,$$

atunci avem:

$$\frac{a^2(a^2-2bc)}{a^4-(b-c)^4}+\frac{b^2(b^2-2ca)}{b^4-(a-c)^4}+\frac{c^2(c^2-2ab)}{c^4-(a-b)^4}=\frac{3}{8}$$

N. G BOTEA

468. — Să se calculeze pentru $t=1$, limita expresiei:

$$E=\frac{2(1-t^{4k})}{(1-t^2)^2}-4\frac{k+1-t^{4k}}{(1-t^2)^2}+\frac{(2k+2)(2k+1)-2t^{4k}}{1-t^2}$$

k fiind un întreg pozitiv.

V. ALACI.

469. — Să se găsească condiția de compatibilitate a sistemului:

$$\begin{cases} x-3y+4=0 \\ x+y-4\alpha\beta=0 \\ (\alpha^2+1)x-(2\alpha\beta+1)y+p=0. \end{cases}$$

Condiția fiind de forma, $f(\alpha, \beta, p)=0$, se cere: 1°. Să se studieze cu ajutorul teoremei lui *Rolle* natura rădăcinelor ecuației $f(\alpha, 1, p)=0$, când p variază între $-\infty$ și $+\infty$. 2°. Să se calculeze cu două zecimale exacte una din rădăcini pentru $p=1$

AUGUST COMAN.

470. — Să se stabilească relațiile:

$$\frac{\alpha r_a+\beta r_b+\gamma r_c-r(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\sin^2\frac{A}{2}+\beta\sin^2\frac{B}{2}+\gamma\sin^2\frac{C}{2}}=4R$$

$$\frac{\alpha^n(r_a-r)^n+\beta^n(r_b-r)^n+\gamma^n(r_c-r)^n}{\alpha^n\sin^{2n}\frac{A}{2}+\beta^n\sin^{2n}\frac{B}{2}+\gamma^n\sin^{n}\frac{C}{2}}=4^nR^n,$$

unde α, β, γ sunt niște numere arbitrare, iar restul notațiilor fiind cele obicinuite într'un triunghiu.

EMIL STEFANESCU

Erată. In problema 434, relația: $x'x''=(1-x')(1+x'')-1$, trebuie înlocuită prin: $x'+x''=(1-x')(1-x'')-1$.

INFORMATIUNI

Incepând cu acest număr, anunţăm că nu vom mai lua în considerare, problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată şi să iscălească.

Primim încă dela unii corespondenţi mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacţie se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e uşor de înţeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecinţă rugăm pe corespondenţii noştri să redacteze fiecare problemă separat, şi când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat şi prinse la problemă. Atragem în acelaşi timp atenţia harnicilor noştri corespondenţi să pue mai multă atenţie şi osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond şi formă.

Abonamentul pe anul V-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

60 (ŞASEZECI LEI)

şi se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Directorul Şcoalei Superioare P. T. T.

Timişoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL V. 15 AUGUST 1925 NO. 6

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 6 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 60 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. VALCOVICI. ASUPRA UNOR FORMULE DE MECANICA.
2. NOTE MATEMATICE, 8, 9.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 81, 326, 409, 417, 419, 420, 429, 433, 446.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 60 lei
Anul III, broşat, 60 lei
Anul IV, broşat, 60 lei.

ANUL V. — No. 6. TIMISOARA, 15 AUGUST 1925.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 6 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 60 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

ASUPRA UNOR FORMULE DE MECANICA

de V. VALCOVICI.

In numărul din April 1924 al revistei „Nouvelles Annales“ D. *Sudria* dă teoremei lui Coriolis o demonstrație elegantă vectorială.(1) De altfel această demonstrație se impune în mod natural dacă adoptăm notația vectorială, în cât de vre-o zece ani încoace am întrebuințat-o în mod constant în cursul de Mecanică la Universitatea din Iași și la Școala Politecnică din Timișoara.

Este drept că o mare parte din metoadele de expunere vectorială a Mecanicei nu sunt destul de răspândite. Puține tratate de Mecanică au îmbrățișat în mod sincer teoria vectorilor, așa că difuziunea acestor metoade nouă, care ar fi de o reală utilitate în desvoltarea ideei științifice în Mecanică, este încă la început.

In cele ce urmează imi voiu permite să indic o metoadă simplă pentru a găsi proiecțiunile vitesei și ale acceleraţiei pe alte axe de cât cele carteziene obicinuite. Voiu întrebuința notația vectorială cea mai curentă care imi pare și cea mai comodă.

1. Să considerăm mai întâi o traiectorie plană, descrisă de un punct mobil M. Fie $\bar{r}$ vectorul $\overline{OM}$, O fiind un punct fix al spațiului, și $\bar{\rho}$ vectorul cu aceiași direcție și același sens ca și $\bar{r}$ având însă valoarea absolută egală cu 1 (vectorul-unitate).

Vom putea scrie:

$$\bar{r} = r\bar{\rho},$$

r fiind mărimea absolută a vectorului $\bar{r}$.

(1) *I. Sudria*, Sur la derivée relative d'un vecteur;; application au théoreme de Coriolis, Nouvelles Annales, Avril 1924.

Derivând această relație în raport cu timpul t și însemnând derivata cu un punct pus de asupra literei vom avea:

$$\dot{\bar{r}} = \dot{r}\bar{\rho} + r\dot{\bar{\rho}}. \tag{1}$$

Insă se vede imediat pe o figură de poziție că avem:

$$\dot{\bar{\rho}} = \dot{\theta}\bar{\varepsilon},$$

θ fiind unghiul pe care-l face dreapta OM cu o direcție fixă din planul traiectoriei, iar $\bar{\varepsilon}$ vectorul-unitate așezat normal pe OM, care se obține învârtind în jurul lui M, în sensul mișcării, vectorul $\bar{\rho}$ transportat în M.

Relația (1) devine:

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{\rho} + r\dot{\theta}\bar{\varepsilon}, \tag{2}$$

$\bar{v}$ fiind vitesa-vector a mobilului M.

O nouă derivare ne dă acceleraţia $\bar{a}$:

$$\bar{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta})\bar{\rho} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\bar{\varepsilon}, \tag{3}$$

ținând seama de relația evidentă:

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = -\dot{\theta}\bar{\rho},$$

Relațiile (2) și (3) ne dau proiecțiunile vitesei $\bar{v}$ și ale acceleraţiei $\bar{a}$ în mișcarea plană, pe raza vectoară și pe o perpendiculară la aceasta.

2. Să luăm acum cazul general al unei traiectorii oarecare și fie $\bar{\tau}$ vectorul-unitate dirijat după tangenta la traiectorie în sensul mișcării. Vom avea:

$$\bar{v} = \dot{s}\bar{\tau},$$

unde s înseamnă lungimea arcului traiectoriei socotit dintr'un punct oarecare al ei.

Derivând în raport cu timpul obținem acceleraţia:

$$\bar{a} = \ddot{s}\bar{\tau} + \dot{s}\dot{\bar{\tau}}.$$

Insă o nouă figură ne arată imediat ca mai sus că avem:

$$\dot{\bar{\tau}} = \dot{\alpha}\bar{\nu},$$

unda $\bar{\nu}$ este vectorul-unitate dirijat pe normala principală, iar α derivata în raport cu timpul a unghiului cuprins între două tangente vecine. Dealtfel avem:

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{ds}\dot{s} = \frac{\dot{s}}{R},$$

R fiind razá de curbură a traiectoriei.

Valoarea acceleraţiei ia atunci forma:

$$\bar{a} = \ddot{s}\bar{\tau} + \frac{v^2}{R}\bar{\nu},$$

de unde se vede că proiecţiunile acceleraţiei pe tangentă, pe normala principală şi pe binormala la traiectorie sunt respectiv:

$$\frac{dv}{dt}, \quad \frac{v^2}{R} \text{ şi zero.}$$

NOTE MATEMATICE

8. Asupra problemei 387. In *Gazeta Matematică*, vol. XVII, pag. 80, am propus problema 1751, cu următorul enunţ:

Să se demonstreze că dacă patratul unui număr se termină prin însuşi numărul, toate puterile lui se bucură de această propriteate.

La pagina 191, a aceluiaşi an, am publicat soluţia şi generalizarea problemei 1751, soluţie şi generalizare date de d-l *T. Mareş*, astăzi inginer şi membru al societăţii *Gazeta Matematică*. Iată generalizarea d-lui *T. Mareş*.

Să se arate că dacă N *este un număr întreg şi dacă* N^p *se termină cu* N^q, $(p>q)$, *atunci orice putere a lui* N *de forma* $N^{m(p-q)+q}$ *numerile* m, p *şi* q *fiind întregi şi pozitive.*

Generalizarea dată acum 14 ani problemei 1751 din *Gazeta Matematică*, este copiată întocmai de d-l *A. Roşu* şi trimisă la *Revista Matematică din Timişoara*, ba mai mult soluţia acelei generalizări este copiată cuvânt cu cuvânt. N'aşi fi relevat aceasta dacă n'aşi dori să reamintesc tinerilor corespondenţi că scopul revistei noastre este şi instructiv şi educativ. Este drept că ştiinţele matematice studiază linii de toate traseurile posibile drepte şi curbe, dar în materie nu tolerează decât o singură linie, linia dreaptă a cinstei celei mai absolute. Oamenii cam nesocotesc rigorile morale ale matematicilor şi d-l *A. Roşu* a căzut în mrejele slăbiciunei oamenilor. Este o greşeală mare pentru debutul d-sale, are însă timpul să se dezbare de ea şi când publică ceva copiat de aiurea să nu se jeneze să indice sursa.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

9. *Evaluarea unei sume algebrice. Dacă* p *şi* k *sunt întregi pozitivi,* $1 \leq k < \frac{p}{2}$ *ne propunem a dovedi că:*

$$p^{p-2k} - C_1^p (p-2)^{p-2k} + C_p^2 (p-4)^{p-2k} - \ldots + (-1)^n C_p^n (p-2n)^{p-2k} = 0,$$

unde:

$$n = \begin{cases} \frac{p-1}{2}, & \text{pentru } p \text{ impar.} \\ \frac{p}{2} - 1, & \text{pentru } p \text{ par.} \end{cases}$$

Pentru aceasta pornim dela următoarele dezvoltări cunoscute:

Pentru p impar:

$$(1) \quad \sin^p t = \frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2^{p-1}} \left[\sin pt - C_p^1 \sin(p-2)t + C_p^2 \sin(p-4)t - \ldots + (-1)^{\frac{p-1}{2}} C_p^{\frac{p-1}{2}} \sin t \right]$$

Pentru p par:

$$(2) \quad \sin^p t = \frac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{2^{p-1}} \left[\cos pt - C_p^1 \cos(p-2)t + C_p^2 \cos(p-4)t - \ldots + (-1)^{\frac{p}{2}-1} C_p^{\frac{p}{2}-1} \cos 2t + (-1)^{\frac{p}{2}} \frac{1}{2} C_p^{\frac{p}{2}} \right]$$

1°. Derivăm relaţia (1) de $p - 2k > 0$, ori şi ţinând seamă că:

$$D^n \sin pt = p^n \sin\left(pt + n\frac{\pi}{2}\right),$$

avem:

$$D^{p-2k}\sin^p t=\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{2^{p-1}}\left\{p^{p-2k}\sin\left[pt+(p-2k)\frac{\pi}{2}\right]\right.$$

$$-C_p^1(p-2)^{p-2k}\sin\left[(p-2)t+(p-2k)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$+C_p^2(p-4)^{p-2k}\sin\left[(p-4)t+(p-2k)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\left.-\ldots+(-1)^{\frac{p-1}{2}}C_p^{\frac{p-1}{2}}\sin\left[t+(p-2k)\frac{\pi}{2}\right]\right\}.$$

Dacă în această identitate luăm $t=0$ și observăm că $p-2k$ este impar, avem:

$$(3)\quad \frac{(-1)^{p-k-1}}{2^{p-1}}\left[p^{p-2k}-C_p^1(p-2)^{p-2k}\right.$$

$$\left.+C_p^2(p-4)^{p-2k}-\ldots+(-1)^{\frac{p-1}{2}}C_p^{\frac{p-1}{2}}\right]$$

$$=\left|D^{p-2k}\sin^p t\right|_{t=0}.$$

Rămâne să calculăm pentru $t=0$, derivata de ordinul $p-2k$ a lui $\sin^p t$.

Avem:

$$D^1\sin^p t=p\sin^{p-1}t\cos t$$

$$D^2\sin^p t=p(p-1)\sin^{p-2}t\cos^2 t-p\sin^p t$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D^{p-2k}\sin^p t=P(\sin^m t\cos^n t),\quad m+n=p,$$

unde $P(\sin^m t\cos^n t)$ înseamnă un polinom în $\sin^m t\cos^n t$ și fiindcă ordinul de derivare $p-2k$ e mai mic ca exponentul p a lui $\sin^p t$, urmează că în toți termenii polinomului intră factorul $\sin t$ la o putere mai mare sau cel puțin egală cu $p-2k$. Așa fiind, rezultă imediat, că:

$$(4)\quad \left|D^{p-2k}\sin^p t\right|_{t=0}=\left|P(\sin^m t\cos^n t)\right|_{t=0}=0,$$

și atunci din relația (3) deducem:

$$(5)\quad p^{p-2k}-C_p^1(p-2)^{p-2k}+C_p^2(p-4)^{p-2k}$$

$$+\ldots+(-1)^{\frac{p-1}{2}}C_p^{\frac{p-1}{2}}=0,$$

unde p este impar.

2°. Luăm relația [2], o derivăm de $p-2k$ ori și ținând seamă că:

$$D^n\cos pt=p^n\cos\left(pt+n\frac{\pi}{2}\right),$$

avem:

$$D^{p-2k}\sin^p t=\frac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{2^{p-1}}\left\{p^{p-2k}\cos\left[pt+(p-2k)\frac{\pi}{2}\right]\right.$$

$$-C_p^1(p-2)^{p-2k}\cos\left[(p-2)t+(p-2k)\frac{\pi}{2}\right]$$

$$+C_p^2(p-4)^{p-2k}\cos\left[(p-4)t+(p-2k)\frac{\pi}{2}\right]-\ldots$$

$$\left.\ldots+(-1)^{\frac{p}{2}-1}C_p^{\frac{p}{2}-1}2^{p-2k}\cos\left[2t+(p-2k)\frac{\pi}{2}\right]\right\}$$

Dacă în această identitate luăm $t=0$ și observăm că $p-2k$ este par, avem:

$$(6)\quad \frac{(-1)^{p-k}}{2^{p-1}}\left[p^{p-2k}-C_p^1(p-2)^{p-2k}+C_p^2(p-4)^{p-2k}\right.$$

$$\left.-\ldots+(-1)^{\frac{p}{2}-1}C_p^{\frac{p}{2}-1}2^{p-2k}\right]=\left|D^{p-2k}\sin^p t\right|_{t=0}.$$

Dar ca și mai sus, la 1°, relația (4), avem:

$$\left|D^{p-2k}\sin^p t\right|_{t=0}=\left|P(\sin^m t\cos^n t)\right|_{t=0}=0,$$

și atunci din relația (6) deducem:

$$(7)\quad p^{p-2k}-C_p^1(p-2)^{p-2k}+C_p^2(p-4)^{p-2k}-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{\frac{p}{2}-1}C_p^{\frac{p}{2}-1}2^{p-2k}=0,$$

unde p este par.

Egalitățile (5) și (7) pot fi cuprinse în următoarea:

$$(8)\quad p^{p-2k}-C_p^1(p-2)^{p-2k}+C_p^2(p-4)^{p-2k}-\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n C_p^n(p-2n)^{p-2k}=0,$$

unde:

$$n=\begin{cases}\dfrac{p-1}{2}, & \text{pentru } p \text{ impar}\\[2ex] \dfrac{p}{2}-1, & \text{pentru } p \text{ par},\end{cases}$$

și avem astfel evaluată însumarea propusă.

V. ALACI

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXX, No. 11, Iulie 1925. † *Anghel Saligny*. Asupra unor cercuri remarcabile din triunghiu, de *C. H. Nicolau*.

2. *Foaia Matematică*, anul II, No. 7, Iulie 1925. Generalizarea teoremei triunghiurilor ortologice de *Leon Weiss*. Asupra unor puncte coliniare, de *N. G. Botea*.

3. *Insemnări Matematice*, anul I, No. 6, Iunie 1925. Cercuri remarcabile ale unui triunghiu, de *Petru Spacu* şi *Angelo Ionescu*. O generalizare, de *Ioan Agârbiceanu*.

4. *Curierul Matematic*, vol. I, No. 5, Iulie 1925. Asupra unui sistem de ecuaţiuni transcedente, de *C-tin Georgescu*. Câteva proprietăţi într'un triunghiu, de *N. G. Botea*.

PROBLEME REZOLVATE

81. — *Să se arate că numărul 99...955...56 nu este patrat perfect.*

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

De şi prin enunţ nu se precizează numărul cifrelor numărului 99...995...56 totuşi, se poate deduce din simetria cu care el este scris. că acest număr este format din n cifre egale ca 9 după care urmează n cifre egale cu 5 şi apoi o cifră egală cu 6. — In aceste condiţiuni numărul dat se poate scrie, după înmulţirea lui cu 9:

$$9\,N = 899\ldots96000\ldots04$$

adică 9 N este format din cifra 8 după care urmează $n-1$ cifre egale cu 9, apoi cifra 6, apoi n cifre egale cu 0 şi în fine cifra 4, în total $2n+1$ cifre. Se observă că se poate scrie:

$$9N = 8\times10^{2n+1} + (10^{n-1}-1)\,10^{n+2} + 6\times10^{n+1} + 4,$$

sau înlocuind pe 8 prin $9-1$ şi pe 6 prin $10-4$ şi făcând toate calculele, se găseşte:

$$9N = 9.10^{2n+1} - 4.10^{n+1} + 4.$$

Inlocuind în membrul II pe 9 prin $10-1$ se găseşte:

$$(1)\qquad 9N = 10^{2(n+1)} - 4.10^{n+1} + 4 - 10^{2n+1} = (10^{n+1}-2)^2 - 10^{2n+1}.$$

Dacă N ar fi patrat perfect atunci şi 9 N ar fi un patrat perfect M^2 şi am avea conform egalităţii (1).

$$(2)\qquad (10^{n+1}-2)^2 - 10^{2n+1} = M^2$$

$$\overset{*}{*}\quad (10^{n+1}-2)^2 - M^2 = 10^{2n+1}$$

$$\overset{*}{*}(3)\quad (10^{n+1}-2+M)\,(10^{n+1}-2-M) = 10^{2n+1}$$

Membrul II al egalităţii (3) neavând de cât factorii 2 şi 5 va trebui să avem neapărat egalităţile simultane:

$$10^{n+1}-2+M = 2^{\alpha}.5^{\beta} \quad (\text{unde } \alpha+\beta = 2n+1$$

$$10^{n+1}-2-M = 2^{2n+1-\alpha}.5^{2n+1-\beta}$$

$$\overset{*}{*}\quad 10^{n+1}-2 = \tfrac{1}{2}\left[2^{\alpha}.5^{\beta} + 2^{2n+1-\alpha}.5^{2n+1-\beta}\right]$$

$$\overset{*}{*}\quad 10^{n+1}-2 = 2^{\alpha-1}.5^{\beta} + 2^{2n-\alpha}.5^{2n+1-\beta}.$$

Ultima egalitate este imposibilă căci membrul II este multiplu de 10 pe când membrul I nu este multiplu de 10. Urmează că şi egalitatea (2) este imposibilă şi că deci 9 N nu poate fi patrat perfect.

GH. B.

Observaţiuni. Problema aceasta, foarte uşoară după cum se vede, a fost propusă în numărul de la 15 Ianuarie 1922. — De atunci sau primit foarte numeroase aşa zise soluţiuni, chiar şi de la corespondenţii cei mai reputaţi. — Nu a fost însă nimeni care să demonstreze că numărul 99...955...56 nu este patrat perfect. — Toţi au *afirmat* dar nici unul n-a demonstrat această teoremă şi este o mare diferenţă între a afirma şi a demonstra. — Diferenţa aceasta trebue subliniată şi în alte domenii nu numai în matematici. — Câte nu se afirmă, astăzi mai ales, care nu sunt de loc adevărate sau care nu sunt adevărate de cât în parte, în minus sau în plus. — Interpretările permise a se da cuvintelor, fac ca în alte domenii de cât în matematici, afirmaţiunile să învingă adesea ori dovezile şi astfel se răstoarnă tabla valorilor ceia ce face ca societatea să sufere şi dreptatea să fie înfrântă. — Matematica nu îngădue această imoralitate, exemplul elementar al problemei 81 dovedeşte aceasta şi de aceia nu menţionez numele nici unuia din cei ce au trimis soluţii pentru această problemă. Ca corespondenţii că vadă eroarea raţionamentului făcut rezum, în cele ce urmează, rezultatele la care au ajuns. — Cei care au trimis soluţia problemei se pot recunoaşte uşor.

1°. O serie de corespondenţi au pus pe N sub forma:

$$N = \frac{9.10^{2n+1} - 4.10^{n+1} + 4}{9}$$

adică au găsit formula (1), şi apoi au conchis fără nici o demonstraţie *„De aici se vede că N nu e patrat perfect"*. Intrebarea firească ar fi *cum se vede?*

2°. Unul vrea să dovedească că 9 N este patrat perfect identificând pe

$$9.10^{2n} - 4.10^{n} + 4 \quad \text{cu} \quad \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta.$$

Pentru identificare în

$$\alpha = 3.10^{n}, \qquad \beta = 2$$

şi ajunge la o relaţie de condiţie imposibilă. — Această identificare nu este însă permisă nici din punct de vedere algebric, nici din punct de vedere aritmetic căci:

$$9.10^{2n} - 4.10^{n} + 4$$

este un număr aritmetic, iar nu un polinon în α şi β. Pentru o mai bună lămurire iată cum se poate arăta de exemplu pe această cale, nelogică, că 100 nu-i patrat perfect. Avem:

$$100 = 81 + 10 + 9.$$

Identificând cu $\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$ am

$$\alpha^2 = 81, \quad \beta^2 = 9 \quad \text{şi} \quad 2\alpha\beta = 10$$

ceia ce conduce la relaţia de condiţie, evident imposibilă,

$$2 \times 9 \times 3 = 10$$

deci 100 nu-i patrat perfect. — Unde-i raţionamentul?

3°. Unul stabileşte (??) fără nici o demonstraţie că:

$$99\ldots955\ldots56 = M\,3 + 2$$

şi deci nu-i patrat perfect. Dar ce te faci cu 9995556 care este multiplu de 3 sau cu $99\ldots955\ldots56$ care iar este multiplu de 3. — Apoi dacă un patrat perfect este de forma $M\,3$ sau $M\,3+1$, nu urmează că orice număr de una din acesta forme este patrat perfect.

4°. Insemnând cu Q numărul format din n cifre egale cu 1, stabilesc unii că:

$$N = 810.Q + 140.Q + 6$$

şi conchid „adică nu este patrat perfect". — De ce *adică?*

5°. Altul scrie că:

$$N = (28\,Q + 2)^2 + (5\,Q + 1)^2 + (Q + 1)^3 + 16\,Q$$

nu-i patrat perfect — De ce?

6°. Unul scrie:

$$N = 9(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 10^2) + 5(10^{2-1} + \ldots + 10 + 1) + 1.$$

Cum $9 = 3^2$ şi $1 = 1^2$ trebue ca termenul al doilea în fie înmulţit cu $2 \times 3 \times 1 + 6$.

Ce enormitate pentru un fost elev în clasa VIII R. Galaţi.

7°. Un altul pe când era în clasa V la Cerna-Voda. Zice:

$$\frac{99\ldots955\ldots56}{4} = 249\ldots98\ldots89.$$

Observ că $249\ldots98\ldots89$ se divide cu 3 dar nu se divide cu 9.

Aşa ar fi dacă nu ar fi numere ca 2499998888889 care se divide cu 9 şi totuşi nu-i patrat perfect.

8°. Câţi-va se bazează pe problema din *„Culegere de Probleme"*, ediţia I, Aritmetica, XXXIX, 1 în care se dau ultimele 2 cifre ale unui patrat perfect. — Intâmplarea face ca în „Culegere de Probleme" să fie şi erori de tipar şi că tocmai problema 1, Capitolul XXXIX, Aritmetica să fie ofertată de o astfel de greşală şi anume în loc de terminaţiunea 56 este scrisă terminaţiunea 54.

326. — *Intr'un triunghiu oarecare există relaţia:*

$$\frac{r_a - r_b}{a - b} + \frac{r_b - r_c}{b - c} + \frac{r_c - r_a}{c - p} = \frac{p}{r},$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

N. A. STANESCU.

Folosim relaţiile cunoscute:

$$r_a = \frac{s}{p - a}, \quad r_b = \frac{s}{p - b}, \quad r_c = \frac{s}{p - c},$$

$$a + b + c = 2p, \quad s = pr, \quad s^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

atunci:

$$r_a - r_b = \frac{s}{p-a} - \frac{s}{p-b} = \frac{s(a-b)}{(p-a)(p-b)},$$

$$r_b - r_c = \frac{s(b-c)}{(p-b)(p-c)}, \quad r_c - r_a = \frac{s(c-a)}{(p-c)(p-a)}$$

iar primul membru E al relaţiei cerute se poate scrie succesiv:

$$E = \frac{s}{(p-a)(p-b)} + \frac{s}{(p-b)(p-c)} + \frac{s}{(p-c)(p-a)}$$

$$= \frac{s(p-c+p-a+p-b)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{sp^2}{s^2} = \frac{p^2}{pr} = \frac{p}{r}.$$

Relaţiunea cerută este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Agapescu M. Nicolai* (Semin. Pedag., Iaşi), *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Apătean Camil* (Arad), *Ardelea Radu* (lic. milit., Craiova), *Beldie N. D-tru* (R.-Sărat), *Beju Traian* (lic. Arad), *Bernardis N. Berardo* (Şc. Polit., Timişoara), *Beşchea G. Nicolae* (lic. Braşov), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoşani), *Boghiu Iosif* (lic. Braşov), *Boju Rosetel* (lic. Timişoara), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braester Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Brüll M. Leon* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Budişteanu Al.* (lic. M-rea Dealu), *Căldăraru Leon* (lic. Şincai, Bucureşti), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Constantinescu Gh. Ioan* (lic. Chişinău), *Constantinescu Gr. Ioan* (Buzău), *Constantinescu N. Nicolae* (Semin. Pedag,, Bucureşti), *Constantinescu Venus* (Şc. Polit., Timişoara), *Corsoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Costăchescu N. I.* (lic. Brăila), *Cristea Aurel* (lic. Focşani), *Critz D. M.* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *David Gheorghe* (lic, Timişoara), *David I. Ioan* (Buzău). *Dânga S. Vlad* (lic. Orhei), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dimitrescu A. Mişu* (lic. Roman), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Drăghici Aurelian* (Tg.-Jiu), *Drogeanu Nicolae* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Eleomir, Enea T. Olariu* (Şc. Polit., Timişoara), *Enulescu Ovidiu* (lic. Chişinău), *Epure T. Ştefan* (Buzău), *Flickstein T.* (student, Cernăuţi), *Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iaşi), *Frătici I.* (Şc. Polit., Timişoara), *Gataianţu*

V. Barbu (lic. Caracal), *Gârleşteanu Mihail* (lic. Timişoara), *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *I. N. Georgescu-Val.* (Dadilov), *Ghelber Mauriciu* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Gherbanowsky F. Nicolae* (lic. Orhei), *Ghinicescu I. Gheorghe* (lic. Internat, Iaşi), *Giurgiu H. G., Gradiny I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Grigore T. V.* (lic. Tg.-Jiu), *Grigorescu L. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Grofşoreanu I. Gheorghe* (lic. Arad), *Herşcovici Emanoil* (lic. Galaţi), *Hristea A. Ionel* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Iacob Şt. Eug.* (Botoşani), *Ianculescu Octavian* (Şc. super. Industrială, Timişoara), *Iliescu D. Şelaru* (lic. Tg.-Mureş), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Angelo* (Cluj), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu I. Nicolae* (lic. Piteşti), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Iscovici Paul* (lic. Piteşti), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Lăzărescu M. Vasile* (lic. Giurgiu), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Liuba Gh.* (lic. Arad), *Liubenco D. S.* (lic. Tighina), *Lupan Emanoil* (Semin. Pedag., Iaşi), *Lupse Emil* (Şc. Conductori Technici, Cluj), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Manoil Adolf* (lic. Roman), *Manolescu T. Niculae* (lic. Focşani), *Marcovici H.* (lic. Botoşani), *Marinescu I. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Marinescu Traian* (lic. Giurgiu), *Mihailescu Şt. Niculae* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Mihailescu Romeo* (lic. R.-Vâlcea), *Mihailescu Tase* (lic. Braşov), *Miu M. Ioan* (lic. Caracal), *Mitran Şt. Grigore* (Craiova), *Moroianu I. Oct.* (lic. Constanţa), *Neacşu Vasile* (lic. Braşov), *Neumann Maria* (stud., Cluj), *Nicolau C.* (R.-Sărat), *Obreja Iancu, Pascu D.* (lic. Braşov), *Pătroianu I. Mihail* (lic. Mrea-Dealu), *Percea Viorel* (lic. Timişoara), *Placa Mircea* (lic. Botosani), *Podeanu Aurel* (lic. Piteşti), *Pop Alexandru* (stud., Cluj), *Popescu T. Alexandru* (lic. Giurgiu), *Popescu I. Ep.* (lic. Galaţi), *Popescu Dem. Marin* (lic. Giurgiu), *Popescu N. Niculai* (Şc. Polit. Bucureşti), *Popescu Theodor* (lic. Giurgiu), *Popp Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popovici Puiu I. Dan* (Chişinău), *Rauchbach Arthur* (lic. Gusa-Homorului, Bucovina), *Râmniceanu S. Radu* (Tg.-Jiu), *Rătăn I.* (lic. Braşov), *Roşu Alexandru* (M-rea Dealu), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Schwartz Al. Gh.* (Roman), *Scripcă Laur* (lic. Naţional, Iaşi), *Serban I. Tiberiu* (lic. Braşov), *Serbănescu Ovid* (lic. Constanţa), *Sergheev Ioan* (Şc. Polit., Timişoara), *Silion Gh. Ioan* (lic. Braşov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Spârchez Zeno* (lic. Braşov), *Spacu Gh. Petru, Staicu Irimie* (lic. Braşov), *Stamatescu I. Valeriu* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Stănculescu I. C-tin* (Giurgiu), *Stefănescu Emil, Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Stroescu I. Gheorghe* (lic. Tg.-Mureş), *Şuşelescu N. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Tărăbuta C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Tomescu Gheorghe* (Şc. de Artilerie, Timişoara), *Tunaru R. Traian* (Craiova), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vasiliu Gheorghe* (lic. Timişoara), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Vătăşan G. Ovid* (Şc. Polit., Timişoara), *Vlaţiu Laurenţiu* (Constanţa), *Weiss Solomon* (lic. Galaţi), *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina) şi *Zamfirescu Al.* (Piteşti).

409. — *Să se găsească limita expresiunii:*

$$\left[\left(\frac{1+s^2-2s\cos\alpha}{1+s^2-2s}\right)^{\frac{a(1-1^2)}{s\sin\alpha}}-1\right]\cdot\frac{1}{\sin\alpha}$$

pentru $\alpha=0$.

V. VALCOVICI

Observăm că pentru $\alpha=0$, expresiunea dată ia forma nedeterminată, $\left(1^{\infty}-1\right)\infty$.

Se impune întâi să aflăm pentru $\alpha=0$, limita expresiunei:

$$y=\left(\frac{1+s^2-2s\cos\alpha}{1+s^2-2s}\right)^{\frac{a(1-s^2)}{s\sin\alpha}}$$

Putem scri:

$$\lim_{\alpha=0} y=\lim_{\alpha=0}\left[\left(1+\frac{2s(1-\cos\alpha)}{(1-s)^2}\right)^{\frac{(1-s)^2}{2s(1-\cos\alpha)}}\right]^{\frac{2a(1+s)}{1-s}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=e^0=1.$$

Aşa dar expresiunea dată E poate fi pusă acum sub forma $\frac{0}{0}$, deci putem aplica teoremalui *Hôpital*, dar pentru simplicitate să notăm:

$$u=\frac{1+s^2-2s\cos\alpha}{(1-s)^2},\qquad v=\frac{a(1-s^2)}{s\sin\alpha}.$$

Atunci:

$$(1)\quad \lim_{\alpha=0}\,.\,E=\lim_{\alpha=0}\,.\,\frac{u^v-1}{\sin\alpha}=\lim_{\alpha=0}\frac{u^v\left(\frac{v\,u'}{u}+v'\,\mathrm{L}\,u\right)}{\cos\alpha}$$

Cum:

$$\lim_{\alpha=0}\,.\,u^v=1,\quad u'=\frac{2s\sin\alpha}{(1-s)^2},\quad v'=-\frac{a(1-s^2)\cos\alpha}{s\sin^2\alpha},$$

iar:

$$\frac{v\,u'}{u}=\frac{2a(1-s)^2}{1+s^2-2s\cos\alpha},$$

rezultă că relaţiunea devine:

$$(2)\quad \lim_{\alpha=0}\,.\,E=\lim_{\alpha=0}\,.\left[\frac{2a(1-s^2)}{1+s^2-2s\cos\alpha}-\frac{a(1-s^2)\cos\alpha}{s\sin^2\alpha}\,\mathrm{L}\,\frac{1+s^2-2s\cos\alpha}{(1-s)^2}\right]$$

$$-\frac{2a(1+s)}{1-s}-\frac{a(1-s^2)}{s}\lim_{\alpha=0}\frac{\mathrm{L}\,\frac{1+s^2-2s\cos\alpha}{(1-s)^2}}{\sin^2\alpha}.$$

Ultima fracţie reducându-se pentru $\alpha=0$, la forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, îi putem aplica teorema lui *Hôpital* şi avem:

$$\lim_{\alpha=0} \cdot \frac{L\frac{1+s^2-2s\cos\alpha}{(1-s)^2}}{\sin^2\alpha} = \lim_{\alpha=0} \cdot \frac{(1-s)^2}{1+s^2-2s\cos\alpha} \cdot \frac{2s\sin\alpha}{(1-s)^2} \cdot \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha=0} \cdot \frac{s}{(1+s^2-2s\cos\alpha)\cos\alpha} = \frac{s}{(1-s)^2}.$$

Relaţiunea (2) acum devine:

$$\lim_{\alpha=0} E = \frac{2a(1+s)}{1-s} - \frac{a(1-s^2)}{s} \cdot \frac{s}{(1-s)^2} = \frac{a+1+s}{1-s}.$$

Soluţii date de: *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşfi), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Dânga S. Vlad* (lic. Orhei), *Dimitrescu A. Mişu* (lic. Roman), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Gherbanovsky F. Nicolae* (lic. Orhei), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Mihailescu A. C.* (lic. Internat, Iaşi), *Popescu Nicu* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Popovici C. Ctin* (lic. Internat, Iaşi). S'au primit şi alte soluţii, dar eronate.

417. — *Dacă:*

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},$$

să se dovedească că:

$$\frac{\sqrt[m]{A\sqrt[p]{(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)^{mq}}+B\sqrt[p]{(k_1\alpha_1+k_3\alpha_3)^{mq}}}}{\sqrt[m]{A\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_2\beta_2)^{mq}}+B\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_3\beta_3)^{mq}}}} = \frac{a_1}{b_1}$$

unde:

$$\alpha_1 = \sqrt[q]{a_1^p},\ \alpha_2 = \sqrt[q]{a_2^p},\ \alpha_3 = \sqrt[q]{a_3^p},$$

$$\beta_1 = \sqrt[q]{b_1^p},\ \beta_2 = \sqrt[q]{b_2^p},\ \beta_3 = \sqrt[q]{b_3^p},$$

V. ALACI

Dacă însemnăm cu λ valoarea comună a rapoartelor date, deducem:

$$a_1 = \lambda b_1,\ a_2 = \lambda b_2,\ a_3 = \lambda b_3,$$

şi atunci rezultă:

$$\alpha_1 = \sqrt[q]{a_1^p} = \sqrt[q]{\lambda^q} \cdot \sqrt[q]{b_1^q} = \sqrt[q]{\lambda^p} \cdot \beta_1,$$

$$\alpha_2 = \sqrt[q]{\lambda^p} \cdot \beta_2,\ \alpha_3 = \sqrt[q]{\lambda^p} \cdot \beta_3.$$

Primul membru al relaţiei cerute, se poate scrie acum succesiv:

$$\frac{\sqrt[m]{A\sqrt[p]{(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)^{mq}}+B\sqrt[p]{(k_1\alpha_1+k_3\alpha_3)^{mq}}}}{\sqrt[m]{A\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_2\beta_2)^{mq}}+B\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_3\beta_3)^{mq}}}} =$$

$$\frac{\sqrt[m]{A\sqrt[p]{\lambda^{mp}(k_1\beta_1+k_2\beta_2)^{mq}}+B\sqrt[p]{\lambda^{mp}(k_1\beta_1+k_3\beta_3)^{mq}}}}{\sqrt[m]{A\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_2\beta_2)^{mq}}+B\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_3\beta_3)^{mq}}}}$$

$$= \lambda \cdot \frac{\sqrt[m]{A\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_2\beta_2)^{mq}}+B\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_3\beta_3)^{mq}}}}{\sqrt[m]{A\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_2\beta_2)^{mq}}+B\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_3\beta_3)^{mq}}}}$$

$$= \lambda = \frac{a_1}{b_1}.$$

Identitatea este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Florea G. Alexandru* (lic. Internat, Iaşi), *Ghinicescu I. Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi) şi *Paszko Wilhelm* (student, Bucureşti).

Soluţia 2-a. Ridicând relaţiile date la puterea p şi apoi extrăgând rădăcina q^a, şi observând ultimele relaţii,, putem scri:

$$\frac{\sqrt[q]{a_1^p}}{\sqrt[q]{b_1^p}} = \frac{\sqrt[q]{a_2^p}}{\sqrt[q]{b_2^p}} = \frac{\sqrt[q]{a_3^p}}{\sqrt[q]{b_3^p}} = \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3}.$$

Acum folosind proprietăţi cunoscute ale proporţiilor deducem:

$$\frac{k_1\alpha_1}{k_1\beta_1} = \frac{k_2\alpha_2}{k_2\beta_2} = \frac{k_3\alpha_3}{k_3\beta_2} = \frac{\sqrt[q]{a_1^p}}{\sqrt[q]{b_1^p}}$$

$$\frac{k_1\alpha_1+k_2\alpha_2}{k_1\beta_1+k_2\beta_2} = \frac{k_1\alpha_1+k_3\alpha_3}{k_1\beta_1+k_3\beta_3} = \frac{\sqrt[q]{a_1^p}}{\sqrt[q]{b_1^p}}$$

$$\frac{(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)^{mq}}{(k_1\beta_1+k_2\beta_2)^{mq}} = \frac{(k_1\alpha_1+k_3\alpha_3)^{mq}}{(k_1\beta_1+k_3\beta_3)^{mq}} = \frac{a_1^{mp}}{b_1^{mp}}$$

$$\frac{\sqrt[p]{(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)^{mq}}}{\sqrt[p]{(k_1\beta_2+k_2\beta_2)^{mq}}} = \frac{\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_3\alpha_3)^{mq}}}{\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_3\beta_3)^{mq}}} = \frac{a_1^m}{b_1^m}$$

$$\frac{A\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_2\beta_2)^{mq}}+B\sqrt[p]{(k_1\alpha_1+k_3\alpha_3)^{mq}}}{A\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_2\beta_2)^{mq}}+B\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_3\beta_3)^{mq}}} = \frac{a_1^m}{b_1^m}$$

$$\frac{\sqrt[m]{A\sqrt[p]{(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2)^{mq}}+B\sqrt[p]{(k_1\alpha_3+k_3\alpha_3)^{mq}}}}{\sqrt[m]{A\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_2\beta_2)^{mq}}+B\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_3\beta_3)^{mq}}}} = \frac{a_1}{b_1}$$

şi identitatea cerută este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Agapescu M. Nicolai* (Semin. Pedag., Iaşi), *Aposteanu Ion* (lic. Timişoara), *Ardelea Radu* (lic. Milit.. Craiova), *Băncilă Mircea* (lic. Braşov), *Beldie D-tru* (R.-Sărat), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Blasco Beatrix* (Lugoj), *Boghiu Iosif* (lic. Braşov), *Braeşter Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Drâmbă N. C.* (lic. Galaţi), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Frătici I.* (Şc. Polit., Timişoara), *Frumuşelu H. Gheorghe* (lic. Braşov), *Grigore T. Virgil* (lic. Tg.-Jiu), *Grubenmann I. Gr.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ieremia Petru* (lic. Timişoara), *Ioachim Grigore* (lic. milit., Iaşi), *Ionescu Angelo* (lic. Cluj), *Ionescu Th. Andrei-Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Marcovici H.* (lic. Botoşani), *Miu M. Ioan* (lic. Caracal), *Neumann Maria* (studentă, Lugoj), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Novacu A. Valeriu* (lic. Arad), *Podariu Al.* (lic. Piatra-Neamţ), *Pop Alexandru* (student, Cluj), *Pop Iulian* (Cluj), *Popescu Nicu* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Popovici-Puiu I. Dan* (lic. Chişinău), *Râmniceanu L. Radu* (lic. Tg.-Jiu), *Rapaport A. N.* (lic. Botoşani), *Râtan I.* (lic. Braşov), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Braşov), *Schächter M. Ozias* (Moineşti), *Scripcă Laur* (lic. Naţional, Iaşi), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Stoica S. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Ţanovici V. C-tin* (lic. Ploeşti), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Nicolae* (lic. Focşani), *Velea Gr. Mihail* (lic. milit., Craiova) şi *Vlădea Ioan* (lic. Braşov).

Generalizare, dată de d-nii: *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Pop Alexandru* (student, Cluj) şi *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti).

Dacă:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n},$$

să se dovedească că:

$$\frac{\sqrt[m]{\sum_{i=2}^{n} A_{i-1}\sqrt[p]{(k_1\alpha_1+k_i\alpha_i)^{mq}}}}{\sqrt[n]{\sum_{i=2}^{n} A_{i-1}\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_i\beta_i)^{mq}}}}=\frac{a_1}{b_1},$$

unde:

$$\alpha_i=\sqrt[q]{a_i^p},\quad \beta_i=\sqrt[q]{b_i^p}.$$

Ridicând la puterea p şi extrăgând rădăcina q^a în şirul de rapoarte date, deducem:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\ldots=\frac{\alpha_n}{\beta_n}.$$

Folosind proprietăţi bine cunoscute a proporţiilor, deducem:

$$\frac{k_1\alpha_1+k_i\alpha_i}{k_1\beta_1+k_i\beta_i}=\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\sqrt[q]{a_1^p}}{\sqrt[q]{b_1^p}}$$

$$\frac{A_{i-1}\sqrt[p]{(k_1\alpha_1+k_i\alpha_i)^{mq}}}{A_{i-1}\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_i\beta_i)^{mq}}}=\frac{a_1^m}{b_1^m}.$$

* * *

Făcând pe i să varieze de la 2 la n, vom avea un şir de rapoarte egale şi făcând suma numărătorilor pe suma numitorilor şi apoi extragând rădăcina a m^a, obţinem:

$$\frac{\sqrt[m]{\sum_{i=2}^{n} A_{i-1}\sqrt[p]{(k_1\alpha_1+k_i\alpha_i)^{mq}}}}{\sqrt[m]{\sum_{i=2}^{n} A_{i-1}\sqrt[p]{(k_1\beta_1+k_i\beta_i)^{mq}}}}=\frac{a_1}{b_1},$$

şi identitatea este astfel stabilită.

419. — *A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu, iar* ω *un unghiu care satisface relaţia:*

$$\operatorname{tg}\omega=\operatorname{tg}A\,.\operatorname{tg}B\,.\operatorname{tg}C,$$

să se arate că avem şi:

$$\sin(\omega-A)\sin(\omega-B)\sin(\omega-C)=\sin\omega\cos^2\omega,$$

şi reciproc.

TIB. POPOVICI.

Fiindcă $A+B+B=180^0$, avem:

$$\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}B$$

(C de P pag. 394), urmează din relaţia dată:

$$\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$$

$$\overset{*}{**}\quad \frac{\sin(\omega - A)}{\cos\omega\cos A} = \frac{\sin(B+C)}{\cos B\cos C} = \frac{\sin A}{\cos B\cos C}$$

Analog găsim:

$$\frac{\sin(\omega - B)}{\cos\omega\cos B} = \frac{\sin B}{\cos C\cos A}$$

$$\frac{\sin(\omega - C)}{\cos\omega\cos C} = \frac{\sin C}{\cos A\cos B}$$

Inmulţind aceste trei relaţii, şi ţinând seamă de relaţia dată, deducem:

$$\sin(\omega - A)\sin(\omega - B)\sin(\omega - C) =$$
$$\cos^3\omega \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \cos^2\omega \sin\omega,$$

care este tocmai relaţia cerută.

Reciproc. Din relaţia a 2ª din enunţ, scoatem:

$$\frac{\sin(\omega - A)}{\cos A\cos\omega}\cdot\frac{\sin(\omega - B)}{\cos B\cos\omega}\cdot\frac{\sin(\omega - C)}{\cos C\cos\omega} = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$\overset{*}{**}\quad (1)\quad (\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg} A)(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg} B)(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg} C) =$$
$$\operatorname{tg}^3\omega - \operatorname{tg}^2\omega \sum \operatorname{tg} A + \operatorname{tg}\omega \sum \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$
$$- \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos A\cos B\cos C}$$

Cum:

$$\sum \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C =$$
$$\frac{\sin A\sin B\cos C + \sin A\sin C\cos B + \sin B\sin C\cos A}{\cos A\cos B\cos C}$$
$$= \frac{\cos A\cos B\cos C - \cos(A+B+C)}{\cos A\cos B\cos C}$$
$$= 1 + \frac{1}{\cos A\cos B\cos C},$$

relaţia (1) devine:

$$\operatorname{tg}^3\omega - \operatorname{tg}^2\omega \sum A + \operatorname{tg}\omega - \sum \operatorname{tg} A = 0$$

$$\overset{*}{**}\quad (\operatorname{tg}\omega - \sum \operatorname{tg} A)(\operatorname{tg}^2\omega + 1) = 0.$$

Dar nu putem avea:

$$\operatorname{tg}^2\omega + 1 = 0,$$

urmează că trebue să avem:

$$\operatorname{tg}\omega = \sum \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C,$$

ceia ce trebuia dovedit.

Soluţii date de d-nii: *Beju Traian* (Arad), *Beldie D-tru* (R.-Sărat), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Iiu), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Grigore T. Virgil* (Tg.-Jiu), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Mareş Grigore* (lic. Bacău), *Neumann Maria* (studentă, Lugoj), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Petrescu St. Al.-Dan* (lic. Milit., Craiova), *Pop Iulian* (Cluj), *Popovici Aurel* (lic. Focşani), *Râmniceanu L. Radu* (lic. Tg.-Jiu), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Scărlătescu D.* (student), *Scripcă Laur* (lic. Naţional, Iaşi), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Velea Gr. Mihail* (Craiova) şi *Vlădea Ioan* (lic. Braşov).

420. — *După un număr de două cifre se scrie dublul său, iar apoi triplul acestuia din urmă şi se formează uu patrat perfect de şase cifre. Care-i acel patrat?*

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

Fie $abcdef$ patratul cerut. Conform enunţului avem:

$$cd = 2(ab),\quad ef = 3(cd) = 6(ab).$$

Cum $ef < 100$, iar $ab \geq 10$, urmează:

$$(1)\qquad 60 \leq ef < 100.$$

De altă parte ştim (C. de P. pag. 101) că orice patrat perfect se termină cu: 00, 25, 01, 09, 21, 29, 41, 49, 61, 69, 81, 89, 04, 16, 24, 36, 44, 56, 64, 76, 84, 96, deci ef se găseşte printre aceste grupe.

Nu putem lua pentru ef, decât acele grupe care satisfac inegalitatea (1) şi sunt divizibile cu 6, urmează că:

$$ef = 84 \text{ sau } ef = 96,$$

atunci:

$$ab = 14 \text{ sau } ab = 16.$$

Numărul $abcdef$ poate fi

142884 sau 163296.

Dintre acestea însă, numai numărul 142884 este patrat perfect, astfel că singura soluţie este:

$$abcdef = 142884 = 378^2.$$

Soluţie dată de d-nii: *Avramescu T. Ioan* (lic. Caracal), *Beldie D-tru* (R.-Sărat), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea N.* (lic. Cantemtr, Bucureşti), *Braeşter Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Caftangioglu C. C.* (R.-Sărat), *Caracaş I. Gh.* (lic. Botoşani), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Costea Octavian* (lic. Braşov), *Dânga S. Vlad* (lic. Orhei), *Dospinoiu N.* (Cond. de Lucrări Publice, Tulcea), *Drăgan G.* (lic. Braşov), *Dugan-Castano Victor* (lic. M-rea Dealu), *Ebner Arthur* (lic.

Galaţi), *Enea T. Olariu* (Şc. Polit., Timişoara), *Fezi Gh.* (lic. Orhei), *Florea V. Gheorghe* (lic. Craiova), *Foca I., Ghelber M.* (Semin. Pedag. Bucureşti), *Gherbanowsky F. Nicolae* (lic. Orhei), *Grubenmann Iouel Gr.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Iliescu Şt. Virgil* (lic. Tg.-Mureş), *Iliuţă I. Dăbuleni* (lic. Caracal), *Iliuţă I. Ion* (lic. Caracal), *Ionescu C. Nicolae* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Iscovici Paul* (lic. Piteşti), *Ionescu Angelo* (lic. Cluj), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Kertesz, Manolescu I. Nicolae* (lic. Focşani), *Marcovici H.* (lic. Botoşani), *Marius Maris* (lic. Arad), *Mihăilescu Şt. Nicolae* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Miu M. Ioan* (lic. Caracal), *Munteanu I. Gheorghe* (lic. Craiova), *Neumann Maria* (Lugoj), *Nicolau G. C.* (lic. R.-Sărat), *Novacu A. Valeriu* (lic. Arad), *Podariu Al.* (lic. P.-Neamţ), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Pop Alexandru* (student, Cluj), *Pop Iulian* (Cluj), *Popa-Petrescu Nicolae* (lic. Braşov), *Popovici Aurel* (lic. Focşani), *Popoviçi I. Puiu Dan* (Chişinău), *Purdilă C-tin* (lic. Braşov), *Puşcă I. Ioma* (lic. Internat, Iaşi), *Rapaport N.* (lic. Botoşani), *Rădulescu Nicolae* (lic. Caracal), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Rucâreanu Nicolae* (lic. Braşov), *Schächter M. Ozias* (Moineşti), *Şerban Aurel* (lic. Braşov), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Stoian I.* (lic. Braşov), *Stroescu I. Gheorghe* (lic. Tg.-Mureş), *Theodorescu C. C.* (lic. Tg.-Mureş), *Ţanovici V. C-tin* (lic. Ploeşti), *Ţigoiu I.* (Şc. Comercială, Constanţa), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timişoara, *Velea Gr. Mihail* (lic. Milit., Craiova) şi *Vlădea Ioan* (lic. Braşov).

429. — *a, b, c, r fiind laturile şi raza cercului înscris, într'un triunghiu, să se arate că :*

$$\frac{a+b}{ab(a+b-c)}+\frac{b+c}{bc(b+c-a)}+\frac{c+a}{ca(c+a-b)}=\frac{1}{2r^2}$$

EMIL STEFANESCU

Insemnând cu A primul membru al relaţiei cerute, şi ţinând seamă că :

$$a+b+c=2p,\ p(p-a)(p-b)(p-c)=s^2,\ \frac{s}{p}=r,$$

putem scri succesiv :

$$A=\frac{1}{2b(p-c)}+\frac{1}{2a(p-c)}+\frac{1}{2c(p-a)}$$

$$+\frac{1}{2b(p-a)}+\frac{1}{2a(p-b)}+\frac{1}{2c(p-b)}$$

$$=\frac{p-a+p-c}{2b(p-c)(p-a)}+\frac{p-b+p-c}{2a(p-c)(p-b)}$$

$$+\frac{p-b+p-c}{2c(p-a)(p-b)}=\frac{b}{2b(p-c)(p-a)}$$

$$+\frac{a}{2a(p-b)(p-c)}+\frac{c}{2c(p-a)(p-b)}$$

$$=\frac{p-b+p-a+p-c}{2(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{p}{2(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$=\frac{p^2}{2p(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{1}{2\left(\frac{s}{p}\right)^2}=\frac{1}{2r^2}.$$

Relaţia dată este astfel stabilită.

Soluţii date de d-ni : *Ardelea Radu* (lic. Milit., Craiova), *Beju Traian* (Arad), *Beldie N. D-tru* (R.-Sărat), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Braeşter Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Brădeţeanu C. Cornel* (Craiova), *Caftangioglu C. C.* (lic. R.-Sărat), *Constantinescu D. D.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Corşoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Costea Octavian* (lic. Braşov), *Dânga S. Vlad* (lic. Orhei). *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Drogeanu N. Paul* (Semin. Pedag. Bucureşti), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Frăţici I.* (Şc. Polit. Timişoara), *Frumuşelu Gheorghe* (lic. Braşov), *Gataianţu Barbu* (lic. Caracal), *Gherbanowsky F. Nicolae* (lic. Orhei), *Ghinicescu I. Gh.* (lic. Internat, Iaşi), *Grabovski Eugen* (lic. Orhei), *Grigore T. Virgil* (lic. Tg.-Jiu), *Handjieff V.* (Şc. Polit., Timişoara), *Iacob St. Eugen* (lic. Botoşani), *Iliescu C-tin* (lic. Ploeşti), *Ioachim Grigore* (lic. Milit., Iaşi), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Angelo* (lic. Cluj), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Iscovici Paul* (lic. Piteşti), *Mareş Grigore* (lic. Bacău), *Manoil A.* (Roman), *Manole Gheorghe* (lic. Braşov), *Marinescu S. D.* (Ploeşti), *Miu M. Ioan* (lic. Caracal), *Neumann Maria* (Lugoj), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Novacu A. C. Valeriu* (lic. Arad), *Petrescu M. Ioan* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Placa Mircea* (lic. Botoşani), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Pop Alexandru* (stud., Cluj), *Pop Iulian* (Cluj), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamţ), *Popovici Aurel* (Focşani), *Popovici Dan Puiu* (Chişinău), *Puşcă I. Ioma* (lic. Internat, Iaşi), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Rucăreanu Nicolae* (Braşov), *Rusanda Gheorghe* (lic. Arad), *Spacu Gh. Petru* (Cluj), *Stoica I. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Stroescu I. Gheorghe* (lic. Tg.-Mureş), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Tunaru R. Traian, Ţanovici V. C-tin* (lic. Ploeşti), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Ulea C. Titus* (lic. Internat, Iaşi), *Vasilescu C. Al.* (lic. Ploeşti), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava), *Velea Gr. Mihail* (lic. Milit., Craiova), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov) şi *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina).

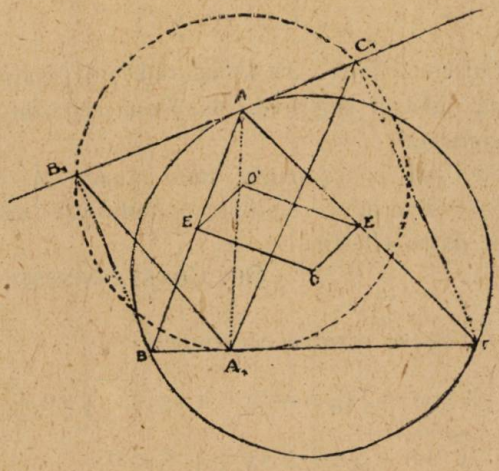
In ultimul timp s'au primit soluţii dela d-nii : *Florea V. V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova) şi *Lepădatu I. Miclea* (lic. Cahul),

433. — *In cercul* O *se înscrie un triunghiu* A B C *Se proiectează vârfurile* B *şi* C *în* B_1 *şi* C_1 *pe tangenta în* A *la cercul* O. *Fie* A_1 *piciorul înălţimei* AA_1 *pe latura* B C, O' *centrul cercului circumscris triunghiului* $A_1B_1C_1$ *şi* E, E' *mijloacele laturilor* A B *şi* A C. *Să se dovedească că patrulaterul* O E O' E' *este un paralelogram.*

V. ALACI

Unghiul $\widehat{AB_1B}=\widehat{AA_1B}=90^0$, deci patrulaterul AA_1BB_1 este inscripţibil şi rezultă că $EO'\perp A_1B_1$ ca fiind linia centrelor a două cercuri (AA_1BB_1) şi $(A_1B_1C_1)$, faţă de coarda lor comună. Apoi O E'

unind centrul O cu mijlocul coardei A C este perpendiculară pe A C.



Dar $AC \parallel A_1B_1$ fiindcă din patrulaterul inscriptibil AA_1BB_1 rezultă ca $\overset{\frown}{AB_1A_1} = \overset{\frown}{ABA_1}$, iar $\overset{\frown}{ABA_1} = \overset{\frown}{CAC_1}$ ca având aceiaşi măsura, deci $\overset{\frown}{AB_1A_1} = \overset{\frown}{CAC_1}$, adică $AC \parallel A_1B_1$, atunci şi perpendicularele respectiv pe ele sunt paralele, anume $OE' \parallel EO'$.

In acelaşi mod dovedim că $OE \parallel O'E'$ ca fiind perpendiculare respectiv pe AB şi A_1C_1, care sunt paralele, fiindcă $\overset{\frown}{ABC} = \overset{\frown}{A_1B_1C} = \overset{\frown}{CAC_1} = \overset{\frown}{C_1A_1C}$. Patrulaterul $OEO'E'$, având laturile opuse paralele, este un paralelogram.

Soluţii date de d-nii: *Aposteanu Ioan* (lic. Timişoara), *Beju T., Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Braeşter Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Bruştuc Gheorghe* (lic. Milit., Iaşi), *Călniceanu Gh.* (lic. Tg.-Jiu), *Diaconu B. Marin* (Amărăşti), *Dogan-Castano Victor* (lic. M-rea Dealu), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Florescu M. Octavian, Gârleşteanu Mihail* (Şc. Polit. Timişoara), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Piteşti). *Grigor« T. Virgil* (lic. Tg.-Jiu), *Iliescu M.* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Munteanu I. Gheorghe* (lic. Craiova), *Nicolau C. Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Niculescu Şt. Emanuel* (lic. Milit.., Craiova), *Podariu Al.* (lic. P.-Neamţ), *Popescu I. Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Săndulescu I. Ioan* (lic. Milit., Craiova), *Scripcă Laur* (Iaşi), *Socaciu Nic.* (Şc. Politechnică), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti) şi *Vlădea Ioan* (lic. Braşov).

In ultimul timp s'au primit soluţii dela d-nii: *Popovici Aurel* şi *Segal I. Leon* (lic. Botoşani).

446. — *Scriind înaintea unui patrat perfect de două cifre c d un număr prin de două cifre a b, astfel ca suma cifrelor sale să fie un patrat sau cub perfect, se obţine un număr prim. Care este acel număr?*

GH GH. VASILIU

c d fiind patrat de două cifre se găseste printre numerile: 16, 25, 36, 49, 64, 81 şi cum *a b c d* este prim, *c d* nu poate fi decât 49 sau 81. Apoi *a b* fiind prim, se găseste printre numerile: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 79, 83, 89 şi 97, însă suma cifrelor trebuind să fie patrat sau cub perfect, *a b* nu poate fi decât:

13, 17, 31, 53, 71, 79, 97.

Atunci *a b c d* este:

$1349 = 19 \times 71$	1381
$1749 = 3 \times 583$	$1781 = 13 \times 137$
$3149 = 47 \times 67$	3181
$5349 = 3 \times 1783$	5381
$7149 = 3 \times 2383$	$7181 = 43 \times 167$
7949	$7981 = 23 \times 347$
9749	9781

Dintre acestea singurile numere prime, care constituesc soluţia problemei, sunt următoarele şase:

1381, 3181, 5381, 7949, 9749 şi 9781.

Soluţii date de d-nii: *Ardelea Radu* lic. Milit., Craiova), *Avramescu T. Ioan* (lic. Caracal), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Boroş P. Dan* (lic. Internat, Iaşi), *Chiru O. Nanov* (lic. Internat, Iaşi), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Halchias G.* (lic. Caracal), *Hulubei Telemac* (lic. Internat, Iaşi), *Iacob St. Eugen* (Botoşani), *Iliovici G. C-tin* (lic. Ploeşti), *Iliuţă I. Ion* (lic. Caracal), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Iscovici Paul* (lic. Piteşti), *Istinie I. C. Brezuică* (lic. Caracal), *Katz Lazăr* (lic. Botoşani), *Kertesz Paul, Lăzărescu I. Ioan* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Manolescu I. Nicolae* (lic, Focşani), *Marinescu S. D.* (Ploeşti), *Munteanu Gheorghe* (lic. Milit., Craiova), *Nestor Gh. D.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Nicolau I. Dobridor* (lic. Milit., Craiova), *Niculescu Emanuel* (lic. Milit., Craiova), *Patron Nicolae* (lic. Milit., Iaşi), *Podariu Al.* (lic. P.-Neamţ), *Purdilă C-tin* (lic. Braşov), *Puşcă I. Toma* (lic. Internat, Iaşi), *Severin C. Marcel* (lic. Botoşani), *Silistrărianu C.* (Ploeşti), *Stănciulescu Dan* (lic. M-rea Dealu). *Stoicescu Theodor* (lic. Internat, Iaşi), *Surugiu Vasile* (lic,

M-rea Dealu), *Tăraş Vasile* (Braşov), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava Bucureşti), *Vasiliev Ilie* (lic. Tulcea), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov *Voinescu D. I.* (lic. Cantemir, Bucureşti) şi *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Piteşti).

In ultimul timp s'a primit soluţii dela d-nii: *Dină N.* (lic. Caracal), *Lepădatu I. Miclea* (lic. Cahul). *Segal Leon* (Botoşani), *Tanovici V. C-tin* (lic. Ploeşti) şi *Vulpanovici Boris* (lic. Chişieău).

PROBLEME PROPUSE

471. — Să se găsească restul împărţirei numărului:

$$5473^{4375},$$

prin 11.

CRISTESCU C. IOAN

472. — Se cere patratul perfect de cinci cifre, astfel ca prima cifră să fie rădăcina cubică a numărului format de cifra doua şi a treia, iar suma ultimelor două cifre să fie egală cu cifra a treia.

ILIUTA I. DABULENI

473. — Fie A'', B'', C'' punctele unde laturile unui triunghiu ABC sunt întâlnite de laturile corespunzătoare ale triunghiului său ortic $A'B'C'$. Să se demonstreze că cercurile $AA'A''$, $BB'B''$, $CC'C''$ au o coardă comună care trece prin ortocentrul triunghiului ABC.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

474. — Printr'un punct M de pe o latură AB a dreptunghiului $ABCD$ înscris în cercul O, se duce o dreaptă oarecare până întâlneşte latura opusă în H şi apoi cercul, în M'. Prin M' se duce perpendiculara la MM' până întâlneşte celelalte laturi AC şi BD respectiv în K şi L. Unind punctele M, K, L, să se demonstreze că H este ortocentrul triunghiului MKL şi că picioarele înălţimilor KK' şi LL' se află respectiv pe diagonalele dreptunghiului $ABCD$.

P. TROFINOV

475. — Să se determine α şi β astfel ca ecuaţiunea:

$$(\beta+1)x^2+(\alpha+\beta+2)x+\alpha+1=0$$

să aibă.

1°. Rădăcini egale. 2°. Două rădăcini pozitive. 3°. Două rădăcini negative. 4°. Două rădăcini de semne contrare.

α şi β fiind coordonatele unui punct M din plan, să se determine regiunile planului cari satisfac celor patru chestiuni puse.

GH. CONSTANTINESCU

476. — Să se rezolve ecuaţiunea:

$$(x^2+x+1)^2(x^4-2x\sqrt{6}-2)-x^4(\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9+\sqrt{80}})+6(x\sqrt{6}+1)=0,$$

toţi coeficienţii fiind reali.

TH. STOICESCU

477. — Să se stabilească identitatea:

$$\frac{6\sin 2t+2\sin 4t-2\sin 6t-\sin 8t}{4}=\frac{\sin^5 2t}{\sin^2 t}$$

V. ALACI

478. — Fie M şi N mijloacele laturilor CD şi CB ale unui paralelogram $ABCD$. Să se arate că centrul de greutate al triunghiului AMN se află în centrul paralelogramului.

V. VALCOVICI

479. — Care sunt punctele din plan, care satisfac sistemul:

$$\begin{cases} 2x-5y+4=0 \\ x+2y-3>0. \\ 3x-4y+2<0. \end{cases}$$

1. Să se afle lungimea segmentului de dreaptă, pe care sunt situate punctele găsite.

2. Intre cele trei semne, care leagă membrii fiecăreia din cele trei expresiuni, efectuând o permutare circulară, să se spună care este sistemul incompatibil, din cele două ce se formează.

MIHAI VASILIU

INFORMATIUNI

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare, problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată şi să iscălească.

Primim încă dela unii corespondenţi mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacţie se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e uşor de înţeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecinţă rugăm pe corespondenţii noştri să redacteze fiecare problemă separat, şi când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat şi prinse la problemă. Atragem în acelaşi timp atenţia harnicilor noştri corespondenţi să pue mai multă atenţie şi osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond şi formă.

Abonamentul pe anul V-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

60 (ŞASEZECI LEI)

şi se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Directorul Şcoalei Superioare P. T. T.

Timişoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL V. 15 SEPTEMBRIE 1925 NO. 7.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 6 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 60 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. TIBERIU POPOVICI. ASUPRA COEFICIENTILOR BINOMIALI.
2. CONCURS.
3 NOTE MATEMATICE, 10.
4. BIBLIOGRAFIE.
5. PROBLEME REZOLVATE: 166, 168, 169, 171, 172, 267, 270, 337.
6. PROBLEME PROPUSE.
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 60 lei
Anul III, broşat, 60 lei
Anul IV, broşat, 60 lei.

ANUL V. — NO. 7. TIMISOARA, 15 SEPTEMBRIE 1925.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 6 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 60 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

ASUPRA COEFICIENȚILOR BINOMIALI

de TIBERIU POPOVICI.

1. In articolul de față îmi propun a studia o expresiune care generalizează suma:

$$\sum_{k=0}^{n}[C_n^k]^2$$

care joacă un un rol destul de important în mecanică și geometrie.

Se știe că dacă notăm $(a, r)_n = a(a+r)\ldots(a+\overline{n-1}\,r)$ avem egalitatea:

$$(a+b, r)_n = (a, r)_n + C_n^1 (a, r)_{n-1}(b, r)_1 + \ldots$$
$$\ldots + C_n^{n-1}(a, r), (b, r)_{n-1} + (b, r)_n$$

zis binomul lui *Vandermonde*. Această egalitate se poate generaliza ca și binomul lui *Newton* și anume avem în general:

$$(a+b+\ldots+l, r)_n = \sum_{\substack{\alpha,\beta..\lambda \\ \alpha+\beta+\ldots+\lambda=n}} \frac{n!}{\alpha!\,\beta!\ldots\lambda}(a, r)_\alpha (b, r)_\beta \ldots (l, r)_\lambda$$

care se mai scrie și

$$\frac{(a+b+c+\ldots+l, r)_n}{n!} = \sum_{\substack{\alpha,\beta..\lambda \\ \alpha+\beta+\ldots+\lambda=n}} \frac{(a, r)_\alpha}{\alpha!}\,\frac{(b, r)_\beta}{\beta!}\ldots\frac{(l, r)_\lambda}{\lambda!}$$

Dacă $r=-1$ se observă că avem:

$$\frac{(i, -1)_k}{k!} = C_i^k$$

prin urmare:

$$(1)\qquad \sum_{\alpha,\beta..\lambda} C_a^\alpha C_b^\beta \ldots C_l^\lambda = C_{a+b+\ldots+}^n$$

unde $a, b \ldots l$ sunt numere constante iar $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ variab le suma lor rămânând însă fixă și egală cu n.

Dacă $a=b=c=\ldots=l=n$ avem:

$$\sum_{\alpha,\beta..\lambda} C_n^\alpha C_n^\beta \ldots C_n^\lambda = C_{pn}^n$$

unde $\alpha+\beta+\ldots+\lambda=n$ iar numărul literelor $a, b, \ldots l$ este p. Această din urmă sumă are un caz particular important și anume când $p=2$ obținem:

$$\sum_{k=0}^{n}[C_n^k]^2 = C_{2n}^n.$$

(Această sumă e studiată de d-l *Szily Kálmán* „*Mathematikai és Fizikai Lapok*" din Budapesta, vol. II, p. 289 și u.)

Observație. Suma (1) este egală cu inversa unei funcțiuni beta, adică:

$$\sum_{\alpha,\beta..\lambda} C_a^\alpha C_b^\beta \ldots C_l^\lambda = \frac{\Gamma(a+b+\ldots+l)}{\Gamma(n)\,\Gamma(a+b+\ldots+l-n)}$$
$$= \frac{1}{\beta(n, a+b+\ldots+l-n)}$$

2. Să considerăm suma:

$$(2)\qquad \sum_{\alpha,\beta..\lambda} C_n^\alpha C_n^\beta \ldots C_n^\lambda = C_{pn}^n$$

care se mai scrie și

$$(3)\qquad \frac{(pn)!}{n!\,[(p-1)n]!}$$

avem:

Teorema I. Suma (2) se împarte cu numerile prime cari sunt cuprinse în intervalele:

$$\frac{(p-1)n}{(p-1)i+1} \cdots \frac{pn}{pi+1}$$

i variind dela 0 la $n-1$.

Se ştie că π fiind un număr prim, dacă $m!$ se împarte cu π^q (q întreg, pozitiv), q este dat de suma:

$$E\left(\frac{m}{\pi}\right)+E\left(\frac{m}{\pi^2}\right)+\ldots$$

unde $E\left(\frac{k}{i}\right)$ este numărul întregilor cuprinşi în $\frac{k}{i}$

Deci dacă:

$$\frac{(p-1)n}{(p-1)i+1}<\pi<\frac{pn}{pi+1}$$

rezultă:

$$pi+1<\frac{pn}{\pi}<pi+\frac{p}{p-1}$$

adică:

$$E\left(\frac{pn}{\pi}\right)=pi+1$$

de asemenea deducem:

$$\frac{pi+1}{p}<\frac{n}{\pi}<i+\frac{1}{p-1'}$$

deci:

$$E\left(\frac{n}{\pi}\right)=i$$

tot aşa din:

$$(p-1)i+\frac{p-1}{p}<\frac{(p-1)n}{\pi}<(p-1)i+1$$

obţinem:

$$E\left(\frac{(p-1)n}{\pi}\right)=(p-1)i.$$

Avem:

$$E\left(\frac{pn}{\pi}\right)-E\left(\frac{(p-1)n}{\pi}\right)-E\left(\frac{n}{\pi}\right)=1$$

şi în aceste condiţiuni trebue ca oricare ar fi i să avem şi:

$$E\left(\frac{pn}{\pi^i}\right)\geqq E\left(\frac{(p-1)n}{\pi^i}\right)+E\left(\frac{n}{\pi^i}\right)$$

ceiace în virtutea egalităţii (3) arată că suma studiată se împarte cu π cel puţin la puterea întâia.

3. Teorema I se poate generaliza în aceiaş ordine de idei în felul următor:

Teorema II. Suma (2) se împarte cu π^q unde $q\leqq p-1$, iar π este un număr prim cuprins în intervalele:

$$\frac{(p-1)n}{(p-1)i+q} \cdots \frac{pn}{pi+q}$$

$$(i=0, 1, 2, \ldots n-1)$$

4. Vom demonstra acum teorema.

Teorema III. Suma (2) se împarte cu numărul prim π cuprins într'unul din intervalele:

$$\frac{pn}{pn+p+1} \cdots \frac{n}{i+1}$$

$$(i=0,\ 1, \ldots n-1)$$

dacă o putere oarecare a lui π este cuprinsă între n şi pn.

Ca mai sus deducem:

$$E\left(\frac{pn}{\pi}\right)=p(i+1)$$

$$E\left(\frac{(p-1)n}{\pi}\right)=(p-1)(i+1)$$

$$E\left(\frac{n}{\pi}\right)=i+1$$

deci:

$$E\left(\frac{pn}{\pi}\right)-E\left(\frac{(p-1)n}{\pi}\right)-E\left(\frac{n}{\pi}\right)=0$$

adică (3) se va împărţi cu π numai dacă este un i pentru care:

$$E\left(\frac{pn}{\pi^i}\right)>E\left(\frac{(p-1)n}{\pi^i}\right)+E\left(\frac{n}{\pi^i}\right)$$

ceiace nu se poate decât dacă $n<\pi^i<pn$.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

5. Din aproape în aproape se poate demonstra următoarea identitate:

$$\frac{m!\,n!}{(m+n)!}=1+2\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{(n+1)\ldots(n+i)}\cdot\frac{m\ldots(m-i+1)}{(m+1)\ldots(m+i)}\qquad(n\leq m)$$

însă:

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+i)}=\frac{C_{2n}^{n-i}}{C_{2n}^{n}}$$

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-i+1)}{(m+1)(m+2)\ldots(m+i)}=\frac{C_{2m}^{m-i}}{C_{2m}^{m}}$$

deci:

$$\frac{m!\,n!}{(m+n)!}=1+2\frac{1}{C_{2m}^{m}C_{2n}^{n}}\sum_{i=1}^{n}(-1)^i C_{2m}^{m-i}C_{2n}^{n-i}$$

sau:

$$\frac{m!\,n!}{(m+n)!}C_{2m}^{m}C_{2n}^{n}=\sum_{i=-n}^{i=n}(-1)^i C_{2m}^{m-i}C_{2n}^{n-i}.$$

Observând această identitate bazându-ne pe egalitatea:

$$\frac{a!\,b!\ldots l!}{(a+b+\ldots+l)!}=\frac{a!\,(b+c+\ldots+l)!}{(a+b+\ldots+l)!}\cdot\frac{b(c+\ldots+l)!}{(b+c+\ldots+l)!}\cdots\frac{k!\,l!}{(k+l)!}$$

obținem:

$$\frac{a!\,b\ldots l!}{(a+b+\ldots+l)!}C_{2(b+c+\ldots+l)}^{b+c+\ldots+l}C_{2(c+\ldots+l)}^{c+\ldots+l}\cdots C_{2(k+l)}^{k+l}C_{2a}^{a}C_{2b}^{b}\ldots C_{2l}^{l}=$$

$$=\sum_{i=-a}^{a}(-1)^i C_{2(b+c+\ldots+l)}^{b+c+\ldots+l-i}C_{2a}^{a-i}\sum_{i=-b}^{b}(-1)^i C_{2(c+\ldots+l)}^{c+\ldots+l-i}C_{2b}^{b-i}\ldots\sum_{i=-k}^{k}(-1)^i C_{2k}^{k-i}C_{2l}^{k-i}$$

Membrul întâi se mai scrie:

$$\frac{(2a)!\,(2b)!\ldots(2l)!\,[2(b+c+\ldots+l)]!\,[2(c+\ldots+l)]!\ldots[2(k+l)]!}{a!\ldots l!\,(a+b+\ldots+l)!\,(b+c+\ldots+l)!^2\,(c+\ldots+l)!^2\ldots(k+l)!^2}$$

iar membrul al doilea se vede că e un număr întreg fiind compus din niște factori cari sunt la rândul lor sume de numere întregi deci:

Teorema IV. Numărul:

$$\frac{(2a)!\ldots(2l)!\,[2(b+c+\ldots+l)]!\,[2(c+\ldots+l)]!\ldots[2(k+l)]!}{a!\ldots l!\,(a+b+\ldots+l)!\,(b+c+\ldots+l)!^2\,(c+\ldots+l)!^2\ldots(k+l)!^2}$$

este totdeauna întreg.

Această teoremă este generalizarea aceleia în virtutea căreia numărul:

$$\frac{(2a)!\,(2b)!}{a!\,(a+b)!\,b!}$$

este întreg și care a fost demonstrată de *Catalan* cu ajutorul teoriei funcțiunilor eliptice.

Dacă facem $a=b=\ldots=l=n$, avem:

$$[C_{2n}^{n}]^{p-1}\frac{C_{2(p-1)n}^{(p-1)n}C_{2(p-2)n}^{(p-2)n}\ldots C_{2n}^{n}}{C_{pn}^{n}C_{(p-1)n}^{n}\ldots C_{2n}^{n}}=\sum_{i=-n}^{n}(-1)^i C_{2(p-1)n}^{(p-1)n-i}C_{2n}^{n-i}\cdot$$

$$\cdot\sum_{i=-n}^{n}(-1)^i C_{2(p-1)n}^{(p-2)n-i}C_{2n}^{n-i}\ldots\sum_{i=-n}^{n}(-1)^i C_{2n}^{n-i}C_{2n}^{n-i},$$

dacă acuma dăm lui p două valori consecutive și împărțim găsim:

$$\frac{C_{2n}^{n}C_{2(p-1)n}^{(p-1)n}}{C_{pn}^{n}}=\sum_{i=-n}^{n}(-1)^i C_{2(p-1)n}^{(p-1)n-i}C_{2n}^{n-i}$$

care se mai scrie:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n}[C_n^i]\sum_{i=0}^{2(p-1)n}[C_{(p-1)n}^i]^2}{\sum_{\alpha,\beta..\lambda} C_n^\alpha C_n^\beta \ldots C_n^\lambda} = \sum_{i=-n}^{n}(-1)^i C_{2(p-1)n}^{(p-1)n-i} C_{2n}^{n-i}$$

$$\alpha+\beta+\ldots+\lambda=n$$

6. In fine se poate demonstra următoarea identitate:

$$p\,n(p\,n-1)\ldots(p\,n-i+1)=\frac{i!}{i!}[C_i^0 C_{pi}^i - C_i^1 C_{p(i-1)}^i+\ldots+]\,n(n-1)\ldots(n-i+1)$$

$$+\frac{i!}{(i-1)!}[C_{i-1}^0 C_{p(i-1)}^i - C_{i-1}^1 C_{p(i-2)}^i+\ldots]$$

$$+n(n-1)\ldots(n-i+2)+\ldots$$

sau:

$$p\,n(p\,n-1)\ldots(p\,n-i+1)=i!\,C_n^i[C_i^0 C_{pi}^2 - C_i^1 C_{p(i-1)}^i+\ldots]+i!\,C_n^{i-1}(C_{i-1}^0 C_{p(i-1)}^i - C_{i-1}^1 C_{p((-2)}^i+\ldots]+\ldots$$

sau în fine:

$$C_{p\,n}^i = C_{pi}^i C_i^0 C_n^i - C_{p(i-1)}^i[C_n^i C_i^1 - C_n^{i-1}C_{i-1}^0]+$$

$$+C_{p(i-2)}^i[C_m^i C_i^2 - C_n^{i-1}C_{i-1}^1 + C_n^{i-2}C_{i-2}^0]+\ldots$$

iar dacă facem $i=n$, avem:

$$C_{p(n-1)}^n[C_n^n C_n^1 - C_n^{n-1}C_{n\ 1}^0]+C_{p(n-2)}^n[C_n^n C_n^2 - C_n^{n-1}C_{n-1}^1+C_n^{n-2}C_{n-2}^0]+\ldots=0$$

și fiindcă aceasta trebue să aibe loc oricare ar fi p, trebue să avem:

$$C_n^n C_n^1 - C_n^{n-1}C_{n-1}^0=0,$$

$$C_n^n C_n^2 - C_n^{n-1}C_{n-1}^1+C_n^{n-2}C_{n-2}^0=0,$$

. . . . . .

$$C_n^n C_n^i - C_n^{n-1}C_{n-1}^{i-1}+\ldots\pm C_n^{n-i}C_{n-i}^0=0,$$

. . . . . .

CONCURS

Revista Matematică din Timișoara urmând calea începută în anul trecut, publică concurs între corespondenții săi elevi de liceu pentru a se acorda un număr de premii celor mai harnici.

În anul acesta, pentru a ține seamă de studiile făcute și a p ne față în față concurenți pe cât se poate egali, premiile se vor da pe clase și anume:

Pentru cl.	V	1 premiu de	500 lei.
Pentru cl.	VI	1 premiu de	500 lei.
Pentru cl.	VII	1 premiu de	1000 lei.
Pentru cl.	VIII	1 premiu de	1000 lei.

Cine dorește să ia parte la concurs va trebui să se înscrie la d-l Prof. V. Alaci, Piața Doja No. 12, Timișoara. În scrisoare se va indica numele, clasa și liceul la care urmează:

Pentru a putea fi înscris candidatul trebue să fie abonat pe anul în curs.

Candidatul va trebui să rezolve cât mai multe din problemele de concurs publicate în numerile 7, 8, 9, 10 și care vor fi insemnate cu un asterisc*).

Înscrierile se primesc până la 1 Ianuarie 1926. Clasificația se va face după închiderea concursului în modul următor:

Fie-care problemă de concurs, care a fost propusă în aceste patru numere, și a cărei soluție justă, bine și îngrijit redactată este primită, dă dreptul la 5 puncte.

Fie-care problemă simplă, propusă în aceste patru numere a cărei soluție justă, bine și îngrijit redactată este primită dă dreptul la 2 puncte.

Fie-care problemă rezolvată de concurent și publicată în numerile 1, 2, 3, 4, 5 ale revistei dă dreptul la 1 punct.

Premiile se vor acorda pe clase, acelor ce întrunesc cel mai mare număr de puncte. Următorii 2 vor fi menționați. Comisiunea va putea refusa acordarea premiului dacă nivelul general al candidaților din o clasă s'ar arăta nesatisfăcător. În caz când doi candidați ar avea același număr de puncte, se va examina activitatea din trecut si redactarea problemelor pentru a se acorda preferința.

Comisiunea pentru alegerea problemelor, triarea soluțiilor, și acordarea premiilor se compune din D-nii Rector *V. Vâlcovici,* Prof. *V. Alaci,* Lt-Col. *Gh. Buicliu,* Prof. *A. Coman* și Ing. *C. Teodorescu.*

NOTE MATEMATICE

10. *Câteva formule trigonometrice.* In cele ce urmează voi scoate câteva formule trigonometrice pe o cale elementară. Să considerăm formulele cunoscute:

(1) $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b.$

(2) $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b.$

A. Dacă vom înlocui în (1) şi (2) pe $\sin a$ şi $\sin b$ respectiv prin $\cos a \operatorname{tg} a$ şi $\cos b \operatorname{tg} b$, obţinem:

(3) $\sin(a \pm b) = \cos a \cos b (\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b).$

(4) $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b (1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b).$

Prin împărţirea acestor egalităţi (3) şi (4) luate două câte două obţinem şase formule trigonometrice, dintre cari două sunt formulele cari ne dau tangenta sumei şi diferenţei a două arce a şi b.

(5) $$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

(6) $$\frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} = \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

(7) $$\frac{\sin(a+b)}{\cos(a-b)} = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

(8) $$\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)} = \frac{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

(9) $$\frac{\sin(a-b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{t} a - \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}.$$

(10) $$\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)} = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}.$$

Dacă facem în (1) şi (8) $a = b$ obţinem:

(11) $\sin 2a = \dfrac{2 \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg}^2 a}.$ (12) $\cos 2a \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 a}{1 - \operatorname{tg}^2 a},$

formule interesante care ne dau sinusul şi cosinusul arcului dublu în funcţiune de tangenta arcului simplu.

B. Dacă în formulele (1) şi (2) facem: $\cos a = \sin a \cot a$ şi $\cos b = \sin b \cot b$ şi vom urma aceiaşi cale ca şi în A., vom obţine alte formule în funcţiune de *cot.*, analoage cu cele stabilite mai sus.

C. Dacă în formula:

(13) $$\operatorname{tg}\left(\frac{a \pm b}{2}\right) = \frac{\sin a \pm \sin b}{\cos a + \cos b} = -\frac{\cos a - \cos b}{\sin a \mp \sin b}$$

facem $b = 0$ obţinem:

(14) $$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}$$

formulă pe care o putem obţine şi altfel:

Fie de exemplu: $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}}$ înmulţim şi numărătorul şi numitorul cu $2\cos\frac{a}{2}$ avem:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{2 \cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{\sin a}{1 + \cos a}$$

tocmai formula (14).

BESCHEA G. NICOLAE
(lic. Braşov).

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică,* anul XXX, No. 12, Aug. 1925. Problema simultaneităţii, de *Gh. Zapan.* Asupra unor cercuri remarcabile din triunghiu, de *C. H, Nicolau.*

2. *Foaia Matematică,* anul II, No. 8, August 1925. Asupra unor chestiuni de maxim şi minim., de *Tr. Măxinoiu.*

3. *Curierul Matematic,* vol. I, No. 6, August 1925. Asupra unor teoreme a lui *Cesaro,* de *Ion C. Vasiliu.* Consideraţiuni matematice asupra unei probleme *filosofico-religioase,* de *Nicolae C. Segărceanu.*

PROBLEME REZOLVATE

166. — *Există numere de cinci cifre consecutive astfel ca ele să fie produsul unei puteri a lui 3 prin o putere a lui 4.*

FLORIAN ER. GEORGESCU

Cifrele consecutive ale numerelor cerute pot fi aşezate în ordine crescătoare sau descrescătoare, şi astfel numerile cerute dacă există, trebue să se găsească printre următoarele:

12345, 23456, 34567, 45678, 56789
98765, 87654, 76543, 65432, 54321

Ţinând seamă de condiţia de divizibilitate prin 4, numai 23456 şi 65432 sunt divizibile cu 4, dar nici unul din aceste două numere nu se divide cu 3. Nu există deci numere în condiţiile problemei, divizibile cu 3×4, cu atât mai mult nu există astfel de numere, divizibile cu $3^m \times 4^n$.

Soluţii date de d-nii: *Adam Mircea* (lic. Constanţa), *Amărescu O. Gavril* (lic. Caracal), *Arcadian P. Nicu* (lic. Caracal), *Atanasiade Alex.* (Şc. Polit. Timişoara), *Atanasiu I. D-tru* (lic. M-rea Dealu), *Bercovici Emil* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Berdan C-tin* (Şc. Polit. Timişoara), *Blumenfeld David* (lic. Botoşani), *Bonea Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Busilă A. Adrian* (lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Cocorandu M., Coşereanu Ion* (Şc. Polit. Timişoara), *David Gheorghe* (lic. Timişoara), *Dobrescu Băbici* (lic. Caracal), *Dordea A. Traian*, *Dospinoiu N.* (Conductor de Lucrări Publice), *Dumitrescu G. Marin* (lic. Carol, Craiova), *Emilian Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Focşăneanu I. M.* (lic. M-rea Dealu), *Ghiţescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *I. N. Georgescu Val.* (Şc. de Artilerie), *Gogâlniceanu M. Mihail* (lic. Brăila), *Goilav Cristea* (Tecuci), *Grabovscki Eugeniu* (lic. Orhei), *Grofşoreanu I. Gh.* (lic. Arad), *Herşcovici Emanoil* (lic. Galaţi), *Iliescu Em.* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu I. Brezuica* (lic. Caracal), *Ionescu T. Carol* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu N. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Katz Pincu* (Galaţi), *Lăzărescu Fl. Ştefan* (lic. Giurgiu), *Măru D-tru* (lic. Galaţi), *Miclescu Andrei* (Şc. de Artilerie), *Mihăilescu D. C-tin* (Giurgiu), *Musta Ştefan* (student, Cluj), *Negretzu I. Florea* (Piteşti), *Niculescu Valeriu, Pamula Alexandru* (lic. Botoşani), *Părăianu Nicu* (Şc. Navală), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Pop Alexandru* (student, Cluj), *Popea G. Alexandru* (Chişinău), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici Puiu I. Dan* (lic. M-rea Dealu), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Rădulescu P. Marin* (lic. Giurgiu), *Răuţ C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Septelici Raul* (Şc. de Artilerie), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Solomon N.* (Şc. Polit. Timişoara), *Solomon Wilhelm* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Stamatescu I. Valeriu* (Semin. Pedag. Bucureşti), *Ştefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Stoenescu Alexandru* (Bucureşti), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Vasilescu C. Virgil* (lic. Ploeşti) şi *Weiss Solomon* (lic. Galaţi).

168. — *Să se calculeze suma termenilor seriei:*

$$1 - \frac{3}{a} + \frac{6}{a^2} - \frac{10}{a^3} + \frac{15}{a^4} + \dots$$

N. CIORANESCU

Termenul general fiind;

$$u_n = (-1)^{n-1} \frac{1+2+\dots+n}{a^{n-1}} = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2\,a^{n-1}},$$

avem:

$$\lim_{n=\infty} \frac{u_n}{u_{n-1}} = -\lim_{n=\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{a} = -\frac{1}{a}.$$

Deci în virtutea teoremei lui *D'Alembert*, pentru convergenţă trebue ca:

$$\left| -\frac{1}{a} \right| < 1, \quad \text{sau} \quad |a| > 1.$$

Să efectuăm acum însumarea.

Prima metodă. Dacă $|x| < 1$, atunci seria:

$$(1) \qquad x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{x}{1-n},$$

căci este o progresie geometrică descrescătoare infinită.

Derivăm de două ori consecutiv ambii membri ai egalităţii (1), şi fiindcă seria obţinută în primul membrul este convergentă, avem:

$$2 + 3.2x + \dots + x(x+1)x^{n-1} + \dots = \frac{2}{(1-x)^3}$$

sau:

$$(2) \qquad 1 + 3x + \dots + x(x+1)x^{n-1} + \dots = \frac{1}{(1-x)^3}.$$

Dacă luăm:

$$x = -\frac{1}{a}, \text{ unde } \left| -\frac{1}{a} \right| < 1, \text{ fiindcă } |a| > 1,$$

relaţia (2) devine:

$$1 - \frac{3}{a} + \frac{6}{a^2} - \frac{10}{a^3} + \dots = \frac{a^3}{(1+a)^3}.$$

şi suma seriei date este astfel calculată.

Soluţii analoage date de d-nii: *Adam Mircea* (Constanţa), *Buşilă Adrian*, *Dragomirescu N. Ioan* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Dumitrescu G. Marin* (lic. Carol, Craiova), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, Bucureşti), *I. N. Georgescu-Val.*, *Ghitescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Herşcovici Emanoil* (Galaţi), *Lăzărescu Fl. Ştefan* (lic. Giurgiu), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Percea Viorel* (Şc. Polit. Timişoara), *Popescu N. Nicolae* (lic. Câmpina), *Rigani Cr.* (Şc. Polit. Timişoara), *Rubinstein Martin* (lic. Galaţi) şi *Weiss Solomon* (lic. Galaţi).

Metoda 2-a. Presupunem $|a| > 1$, adică seria dată absolut convergentă, şi observăm că o putem scri succesiv:

$$1-\frac{1+2}{a}+\frac{1+2+3}{a^2}-\ldots$$

$$+(-1)^n\,1\frac{1+2+\ldots+n}{a^{n-1}}+\ldots$$

$$=1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\ldots-\frac{2}{a}\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\ldots\right)$$

$$+\frac{3}{a^2}\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\ldots-\right)-\ldots$$

$$=\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\ldots\right)\left(1-\frac{2}{a}+\frac{3}{a^2}-\ldots\right)$$

$$=\frac{a}{1+a}\left[\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\ldots\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\ldots\right)+\frac{1}{a^3}\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\ldots\right)\right.$$

$$-\ldots=\frac{a}{1+a}\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\ldots\right)\cdot$$

$$\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\ldots\right)=\frac{a}{1+a}\cdot\frac{a}{1+a}\cdot\frac{a}{1+a}$$

$$=\frac{a^3}{(1+a)^3}.$$

Seria dată este astfel însumată.

Soluție dată de d-nii: *Biernaschy C-tin* (Șc. de Artilerie), *Bobărnac Mircea* (Șc. Polit. Timișoara), *Cocorandu M.* (Șc. Polit. Timișoara), *Constantinescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Flickstein I.* (lic. Cernăuți), *Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iași), *I. N. Georgescu-Val.* (Șc. de Artilerie), *Gheorghiu E. Lucian* (Șc. Polit. Timișoara), *Gheorghiu Olimpia* (Tulcea), *Giotta V.* (lic. Bârlad), *Ghitescu Virgiliu* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Goldenberg I.* (lic. Galați), *Grünberg S. Hermann* (lic. Galați), *Haimovici C. Solo* (lic. Galați), *Ionescu T. Carol* (lic. Cantemir, București), *Ioniță M. Ioan* (Șc. de Artilerie), *Lepădatu Victor* (lic. Internat, Iași), *Miclescu A.* (Șc. de Artilerie), *Negretzu I. Florea* (Pitești), *Panait Ion* (lic. Galați), *Pop Alexandru* (student, Cluj), *Popescu Ion* (Valeni), *Popovici Chr. Ion* (lic. Galați), *Popovici Tiberiu* (student, București), *Rădulet B. Remus* (Șc. Polit. Timișoara), *Stamatiu Mihail* (Pitești), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Tuducescu A. N.*, *Țiriac Șt.* (lic. Arad), *Weiss Leon* (lic. Galați), *Witzmann Marcu* (lic. Galați) și *Zaider Moise* (Galați).

Metoda a 3-a. Dacă $|x|<1$ și m e diferit de un întreg pozitiv, avem următoarea dezvoltare în serie valabilă:

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1}.x+\frac{m(m-1)}{1.2}x+$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\ldots$$

Dacă aci luăm $x=\frac{1}{a}$ $|a|>1$, și $m=-3$, avem:

$$\left(1-\frac{1}{a}\right)^{-3}=1-\frac{3}{a}+\frac{6}{a^2}-\frac{10}{a^3}+\ldots$$

de unde:

$$1-\frac{3}{a}+\frac{6}{a^2}-\frac{10}{a^3}+\ldots=\frac{a^3}{(1+a)^3}.$$

A se vedea și nota D-lui *Rizescu*. An. II, No. 33, pag. 44.

Soluții date de d-nii: *Amărescu O. Gavril* (lic. Caracal), *Arcadian Nicu* (lic. Caracal), *Biernaschy C.* (Șc. de Artilerie), *Berdan C-tin* (Șc. Polit. București), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoșani), *Bogdan M.* (lic. Caracal), *Brăiloiu Alexandru* (lic. Constanța), *Busilă A. Adrian* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Coșereanu Ion* (Șc. Polit. Timișoara), *Dobrescu-Băbici*, *Dordea A. Traian*, *Georgescu P. C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Georgescu Er. Florian* (lic. Cantemir, București), *I. N. Georgescu-Val*, *Grofșoreanu I. Gheorghe* (lic. Arad), *Ionescu I. Breznica* (lic. Caracal), *Klein S.* (Galați), *Mehlmann Theodor* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Păraianu Nicu* (Șc. Navală), *Popeanu A.* (lic. Constanța), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Schileru C. Dili* (Șc. Polit. Timișoara), *Scodranu Alex.* ((Durostor), *Scripcă Laur.* (lic. Național, Iași), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, București), *Tauber Alex.* (lic. Botoșani) și *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu).

169. — *Să se calculeze direct, fără dezvoltare, valoarea derivatei determinantului:*

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a^x & a^{2x}\\ 1 & b^x & b^{2x}\end{vmatrix}.$$

A. Nicolau

Vom folosi următoarea teoremă. (Éléments de la théorie des Déterminants, par *G. Dostor*, deuxiéme édition, pag. 82.)

Dacă elementele unui determinant de ordinul n, sunt funcțiuni de aceiași variabilă x, derivata determinantului prin raport la această variabilă,

este egală cu suma a n determinanți ce se obțin, înlocuind elementele fiecărei coloane prin derivatele respective a acestor elemente, sau încă înlocuind elementele fiecărei linii prin derivatele acestor elemente.

În virtutea acestei teoreme, putem scrie:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & a^x & a^{2x} \\ 1 & b^x & b^{2x} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^x \mathrm{L}a & 2a^{2x}\mathrm{L}a \\ 1 & b^x & b^{2x} \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^x & a^{2x} \\ 0 & b^x \mathrm{L}b & 2b^{2x}\mathrm{L}b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^x \mathrm{L}a & 2a^{2x}\mathrm{L}a \\ 0 & b^x - 1 & b^{2x} - 1 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^x - 1 & a^{2x} - 1 \\ 0 & b^x \mathrm{L}b & 2b^{2x}\mathrm{L}b \end{vmatrix} =$$

$$a^x(b^x-1)(b^x-2a^x+1)\mathrm{L}a - b^x(a^x-1)(a^x-2b^x+1)\mathrm{L}b.$$

Soluții date de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanța), *Arcadian P. Nicu* (lic. Caracal), *Amărăscu O. Gavril* (Caracal), *Bercovici A. Emil* (lic. Matei-Basarab), *Berdan C.* (Șc. Polit. București), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Brăileanu Al.* (lic. Constanța), *Coșereanu Ion* (Șc. Polit. Timișoara), *Dordea A. Traian*, *I. N. Georgescu-Val.* (Șc. de Artilerie), *Katz P.* (Șc. Polit. București), *Lăzărescu Th. Jean* (lic. Pitești), *Negretzu Florea* (Pitești), *Nicolau M. Iulian* (lic. Pitești), *Părăianu Nicu* (Șc. Navală), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Popovici Tiberiu* (student, București), *Rădulet B. Remus* (Șc. Polit. Timișoara), *Rigani Cr.* (Șc. Polit. București), *Scorusianu I. Eugeniu* (București), *Stamatiu Mihail* (Pitești), *Stoenescu Alexandru* (București) și *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București).

171. — *Să se afle fără ajutorul derivatelor limita expresiunii:*

$$y = (\sin x + \cos 2x)^{\mathrm{tg}\,3x}$$

când x tinde către 30°.

M. SARIAN

Folosim relații cunoscute, puțin transformate:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\mathrm{tg}\,3x = \mathrm{tg}\,x\,\frac{3-\mathrm{tg}^2 x}{1-3\,\mathrm{tg}^2 x} = \mathrm{tg}\,x\,\frac{3\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x - 3\sin^2 x}$$

$$= \mathrm{tg}\,x\,\frac{3-4\sin^2 x}{(1-2\sin x)(1+2\sin x)},$$

și atunci expresia dată se poate scrie:

$$y = [1+\sin x(1-2\sin x)]^{\frac{1}{\sin x(1-2\sin x)}\cdot\frac{\sin^2 x(3-4\sin^2 x)}{\cos x(1+2\sin x)}}$$

Pentru $x = 30^0$:

$$\left|1-2\sin x\right|_{x=30^0} = 0,$$

$$\left|\frac{\sin^2 x(3-4\sin^2 x)}{\cos x(1+2\sin x)}\right|_{x=30^0} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

deci limita lui y pentru $x = 30^0$ este echivalentă cu limita unei expresiuni de forma:

$$\lim_{m=\infty}\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right]^n$$

unde:

$$m = \sin x(1-\sin x), \qquad n = \frac{\cos x(3-4\sin^2 x)}{1+2\sin x}.$$

Rezultă atunci, că avem:

$$\lim_{x=30^0} y = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Soluții analoage date de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanța), *Alexandrescu Mihai* (Constanța), *Alexandrescu Al. Nicolae* (Ploești), *Antoniu S. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Berdan C-tin* (Șc. Polit. București), *Bobărnac Mircea* (Șc. Polit. Timișoara), *Brăileanu Alexandru* (lic. Constanța), *Cocorandu M.* (Șc. Polit. Timișoara), *Dorneanu Vasile* (lic. Internat, Iași), *Flickstein I.* (Cernăuți), *Frătici Ioan* (Șc. Polit. Timișoara), *Focșeneanu I. M.* (lic. M-rea Dealu) *Georgescu C. Ioan* (lic. Pitești), *I. N. Georgescu-Val.* (Șc. de Artilerie), *Ghițescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Iliescu I. Ion* (Galați), *Katz Pincu* (Galați), *Lăzărescu Fl. Ștefan* (Giurgiu), *Mareș Corneliu* (Bacău), *Mateescu G.* (lic. Galați), *Măru D-tru* (Șc. Polit. Timișoara), *Mihăescu D. C-tin* (Giurgiu), *Negretzu Florea* (Pitești), *Părăianu Nicu* (Șc. Navală), *Popeanu A.* (lic. Constanța), *Popescu N. Nicu* (lic. Câmpina), *Popovici Tiberiu* (student, București), *Rigani Cr.* (Șc. Polit. București), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Scodrano Alexandru* (Durostor), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Stamatiu Mihail* (Pitești), *Stănescu A. D-tru* (Galați), *Ștefănescu Emil* (student), *Stoenescu I.* (lic. Galați), *Vasilescu I. D.* (lic. Internat, Iași), *Vasilescu C. Virgil* (Ploești).

S'au primit și multe soluții greșite.

172. *Să se stabilească identitatea:*

$$2\sum_{k=1}^{n}\sin k\,a\,\sin\left(k^2 a+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{4} - \cos\left[n(n+1)a+\frac{\pi}{4}\right].$$

V. ALACI

Prima soluție. Pornim de la primul membru și avem:

$$2\sum_{k=1}^{n}\sin k\,a\sin\left(k^2a+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\cos\left[k(k-1)a+\frac{\pi}{4}\right]-\cos\left[k(k+1)a+\frac{\pi}{4}\right]\right\}$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}\left[\sum_{k=1}^{n}\cos k(k-1)a-\sum_{k=1}^{n}\sin k(k-1)a\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{n}\cos k(k+1)a+\sum_{k=1}^{n}\sin k(k+1)a\right].$$

Dar:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k(k-1)a-\sum_{k=1}^{n}\cos k(k+1)a=1-\cos n(n+1)a,$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k(k+1)a-\sum_{k=1}^{n}\sin k(k-1)a=\sin n(n+1)a.$$

Rezultă atunci, că avem:

$$2\sum_{k=1}^{n}\sin k\,a\sin\left(k^2a+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}$$

$$-\left[\cos n(n+1)a\cos\frac{\pi}{4}-\sin n(n+1)a\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}-\cos\left[n(n+1)a+\frac{\pi}{4}\right],$$

și identitatea dată este astfel stabilită.

Soluții date de d-nii: *Adam I. Mircea* (Constanța), *Berdan C.* (Șc. Polit. București), *Cosereanu Ion* (Șc. Polit. Timișoara), *Goldenberg I.* (lic. Galați), *Katz Pincu* (Galați), *Klein S.* (Galați), *Mateescu G.* (lic. Galați), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Pinchis M.* (lic. Galați), *Popeanu A.*, *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Rădulet B. Remus* (Șc. Polit. Timișoara), *Rigani Cr.* (Șc. Polit. București), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Stamatiu I. Mihail* (Pitești), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, București), *Stoenescu I. Alexandru* (student, București), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani), *Solomon Weiss* (lic. Galați) și *Witzmann H. Marcu* (lic. Galați).

Soluția a 2-a. Vom folosi metoda și formula:

$$(1)\quad\sum_{k=1}^{n}[f(k+1)-f(k)]=f(n+1)-f(1),$$

stabilită în articolul „*Asupra câtorva însumări*", R. M. T., an. II, No. 7.

În adevăr dacă luăm:

$$f(x)=\cos\left[x(x-1)a+\frac{\pi}{4}\right].$$

formula (1) devine:

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\left[k(k+1)a+\frac{\pi}{4}\right]-\cos\left[k(k-1)a+\frac{\pi}{4}\right]$$

$$=\cos\left[n(n+1)a+\frac{\pi}{4}\right]-\cos\frac{\pi}{4}.$$

Transformând diferența de cosinusuri din primul membru, deducem ușor:

$$2\sum_{k=1}^{n}\sin k\,a\sin\left(k^2a+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{4}-\cos\left[n(n+1)a+\frac{\pi}{4}\right],$$

care este tocmai identitatea cerută.

Soluții date de d-nii: *Dobrescu-Băbici*, *I. N. Georgescu-Val* (Șc. de Artilerie), *Herșcovici Emanoil*, *Ionescu I. Brezuica* (lic. Caracal), *Mareș Corneliu* (Bacău), *Măru D-tru* (lic. Galați), *Negretzu Florea* (Pitești), *Niculescu Isaiia* (Mizil), *Părăianu Nicu* (Șc. Navală), *Popovici Tiberiu* (student, București), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Trincă D. Marin* (Caracal), *Urzică Aurel* (lic. Deva) și *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu).

267. — *Dacă $a\neq o$ și e baza sistemului de logaritmi, se cere că se demonstreze că ecuația:*

$$e^a=1+\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2}e^{ax},$$

are o rădăcină cuprinsă între zero și unu.

V. ALACI

Soluție dată de d-l *Niculescu V. Alexandru.*

Dezvoltând pe e^x în serie după formula lui *Maclaurin* și oprindu ne la termenul de rangul al 2-lea, avem:

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}e^{\theta x},$$

$0<\theta<1$. Dacă facem $x=a$, avem:

$$e^a=1+\frac{a}{1}+\frac{a_2}{1.2}e^{\theta a}.$$

Substituind această valoare a lui e^a în ecuația dată și simplificând, obținem:

$$e^{ax}=e^{\theta a},$$

de unde:

$$x = \theta, \quad 0 < \theta < 1,$$

ceiace trebuia dovedit.

Soluţia 2-a dată de d-l *Silaghi Ionel* (student, Cluj).

Ecuaţia dată se poate scri:

$$f(x) = e^a - 1 - \frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} e^{ax} = 0.$$

Dezvoltând pe e^a în serie şi calculând pe $f(0)$ şi $f(1)$, avem:

$$f(0) = \frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!} + \dots$$

$$f(1) = \left(\frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.23} + \frac{a^4}{1.23.4} + \dots\right) -$$

$$\frac{a^2}{2}\left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \dots\right) =$$

$$\frac{a^2}{2}\left[\left(1 + \frac{a}{3} + \frac{a^2}{3.4} + \dots\right) -\right.$$

$$\left.\left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \dots\right)\right].$$

Dacă $a > 0$, rezultă uşor că:

$$f(0) > 0$$

$$f(1) < 0$$

căci în $f(1)$ termenii scăzătorului sunt respectiv mai mari ca ai descăzătului.

Dacă $a < 0$, atunci:

$$f(0) < 0,$$

căci $f(0)$ în acest caz este o serie alternată convergentă cu primul termen $\frac{a^3}{3!}$ negativ; iar:

$$f(1) = \frac{a^2}{2}\left[-\left(1 - \frac{1}{3}\right)a - \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.4}\right)a^2 -\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{1.23} - \frac{1}{3.4.5}\right)a^3 \dots\right]$$

este pozitiv, fiind tot o serie alternată convergentă cu primul termen pozitiv. Deci ori cum ar fi a, pozitiv sau negativ, rezultă că $f(0)f(1) < 0$, rezultă ca ecuaţia dată are o rădăcină între 0 şi 1.

Alte soluţii date de d-nii: *Muşta Ştefan* (student, Cluj), *Oniţiu Florin* (Şc. Polit. Timişoara), *Percea Viorel* (Şc. Polit. Timişoara) şi *Vătăşan G. Ovid* (Şc. Polit. Timişoara).

270. — *Să se arate că expresiunile:*

$$976 \times 61^{n-1} + 2^{2n} \cdot 5^{n+2}$$

$$1207 \times 71^{n\ 1} + 2^{n+3} \cdot 3^{n+1} \cdot 5^n$$

$$1458 \times 81^{n-1} + 2^{3n} \cdot 5^n \cdot 23,$$

sunt fiecare divizibile cu 41.

EMIL STEFANESCU

Însemnând cu E, E_1, E_2, respectiv expresiile date urmărim uşor că putem scri succesiv:

$$E = 16 \times 61^n + 25 \times 20^n = 16\,(\text{mult. } 41 + 20)^n +$$

$$25 \times 20^n = \text{mult. } 41 + 20^n\,(16 + 25) = \text{mult. } 41.$$

$$E_1 = 17 \times 71^n + 24 \times 30^n = 17\,(\text{mult. } 41 + 30)^n +$$

$$24 \times 30^n = \text{mult. } 41 + 30^n\,(24 + 17) = \text{mult. } 41.$$

$$E_2 = 18 \times 81^n + 23 \times 40^n = 18\,(\text{mult. } 41 + 40)^n +$$

$$23 \times 40^n = \text{mult. } 41 + 40^n\,(18 + 23) = \text{mult. } 41.$$

Fiecare din expresiile date este astfel divizibilă cu 41.

Soluţii analoage date de d-nii: *Bălean G.* (lic. Timişoara), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bernardis B.* (lic. R.-Sărat), *Botea Gh. Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Brüll M. Leon* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Brădeţeanu C. Cornel* (Craiova), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Cocorandu M.* (Şc. Polit. Timişoara), *Cosniţă Virgil* (lic. Bârlad), *Gârlesteanu Mihail* (Şc. Polit. Timişoara), *Georgescu C. Ioan* (lic. Piteşti), *I. N. Georgescu Val.* (Giurgiu), *Gheorghiu C.* (Comăneşti), *Grigorescu L. Ion*, *Iliescu Şt. Dima* (lic. Tg.-Mureş), *Iliescu Th. Teodor* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Moroianu At.* (lic. Constanţa), *Musta Şt.* (student, Cluj), *Negretzu Florea* (lic. Piteşti), *Panaitescu I. Al.* (lic. Piteşti), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Percea Viorel* (Şc. Polit. Timişoara), *Popovici Th. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popp I. Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Propst Jean* (Şc. Polit. Timişoara), *Silion Gh. Ion* (lic. Braşov), *Simionescu Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stamatescu I. Valeriu* (Semin. Pedag. Bucureşti), *Stroescu Gheorghe* (lic. Tg.-Mureş), *Tărăbuţă C. Paul* (lic Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Vasilescu A. Mircea* (lic. Giurgiu).

Autorul dă următoarea soluţie mai generală; stabilind întâi că dacă a, b, c, n sunt întregi pozitivi, avem:

$$(1) \qquad b^n \cdot c + (b-a)^n (a-c) = \text{mult. } a.$$

În adevăr, avem succesiv:

$$b^n \cdot c + (b-a)^n (a-c) = b^n \cdot c + (\text{mult. } a + b^n)(a-c) =$$

$$\text{mult. } a + b^n \cdot c - b^n \cdot c = \text{mult. } a.$$

Dacă facem în (1), $a=41$, $b=61$, $c=16$, avem:

$$16\times 61^n+(61-41)^n(41-16)=976\times 61^{n-1}+$$
$$2^{2n}.5^{n+2}=\text{mult } 41.$$

Dacă facem în (1), $a=41$, $b=71$, $c=17$, avem:

$$17\times 71^n+(71-41)^n(41-17)=1207\times 71^{n-1}+$$
$$2^{n+3}.3^{n+1}.5^n=\text{mult. } 41.$$

Dacă facem în (1), $a=41$, $b=81$, $c=18$, avem:

$$18\times 81^n+(81-41)^n(41-18)=1458\times 81^{n-1}+$$
$$2^{3n}.5^n.23=\text{mult. } 41.$$

Alte soluții date de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Arcadian P. Nicu* (lic. Caracal), *Atanasiu I. D-tru* (Huși), *Berdan C.* (Șc. Polit. București), *Braieșter Otto* (lic. Național, Iași), *Corșoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Gabrielescu C. Vasile* (lic. Brăila), *Katz Pincu* (Galați), *Lăzărescu M. Vasile* (Giurgiu), *Mitescu Den. Remdecth* (lic. Tg.-Mureș), *Negretzu Florea* (lic. Pitești), *Pamula Alexandru* (lic. Botoșani), *Rădulescu P. Marin* (lic. Giurgiu, *Stamatiu Mihail* (student, Pitești), *Stânescu A. Nicolae* (Șc. Polit. Timișoara), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani). *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București) și *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu).

337. — *Să se afle toate numerile, care împărțite prin 41 să dea restul 5 și împărțite prin 19 să dea restul 6.*

GRIGORE I. POPESCU

Fie N unul din numerile cerute, x și y câturile lui N, respectiv prin 41 și 19, conform enunțului avem:

$$N=41x+5=19y+6$$
$$(1)\qquad 41x-19y=1$$

Avem de rezolvat în numere întregi ecuația (1). Observăm că dacă:

$$\begin{cases} x=\alpha \\ y=\beta \end{cases}$$

este un sistem de soluții a ecuației (1), atunci:

$$(2)\qquad \begin{cases} x=\alpha+19t \\ y=\beta-41t \end{cases}$$

unde t este un întreg, formează sistemul cel mai general de soluții.

Acum din (1) deducem:

$$y=2x+\frac{3x-1}{19}$$

Pentru ca y să fie întreg, trebuie ca $\frac{3x-1}{19}$ să fie întreg, adică:

$$\frac{3x-1}{19}=a, \qquad a \text{ întreg.}$$

$$x=\frac{19a+1}{3}$$

Dacă luăm $a=2$, atunci:

$$\begin{cases} x=13 \\ y=26+2=28 \end{cases}$$

este un sistem de soluții a ecuației (1), iar:

$$\begin{cases} x=13-19t \\ y=28-41t \end{cases}$$

formează sistemul de soluții cel mai general.

Numerile căutate sunt deci de forma:

$$N=41x+5=41(13+19t)+5=538+779t.$$

Dând lui t valorile 0, 1, 2, ..., găsim că numerile cerute sunt:

538, 1317, 2096, ...

numere care formează o progresie aritmetică cu rația 779.

Soluții date de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Bey M. Gheorghe* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Braieșter I. Otto* (lic. Național, Iași), *Comănescu Al.-Bălteni, David Gheorghe* (lic. Timișoara), *Dimitrescu A. Mișu* (lic. Roman), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Drogeanu Nicolae* (Semin. Pe ag. București), *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *I. N. Georgescu Val.* (Șc. Specială de Artilerie), *Ghelber Mauriciu, Grigore Nicolae* (Învăț., Ialomița), *Goldstein N.* (Șc. Polit. Timișoara), *Grofșoreanu I. L. Gheorghe* (lic. Lugoj), *Grubenmann I. Gr.* (lic. Cantemir, București), *Herșcovici Emanoil* (lic. Galați), *Iliescu Șt. Dima* (lic. Tg.-Mureș), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu A. Ștefan* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Lăzărescu M. Vasile* (lic. Giurgiu), *Manoil Adolf* (Roman), *Marcovici H.* (lic. Botoșani), *Marinescu S. D.* (Ploești), *Marini Paul* (student, Cluj), *Mihailescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Milner I.* (Edinți), *Miu M.*

Ioan (lic. Caracal), *Moroianu I. At.* (Constanța), *Nicolau G. C.* (lic. R.-Sărat), *Petrescu M. Ion* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Podeanu Aurel* (lic. Pitești), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Popescu N Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici Aurel* (lic. Focșani), *Popovici C C-tin* (lic. Internat, Iași), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Purdilă C-tin* (lic. Brașov), *Ralescu Maria* (București), *Rapaport Avram* (lic. Botoșani), *Rauchbach Arthur* (Gura-Humorului, Bucovina), *Roșu Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Schächter S. Arie* (lic. Galați), *Schächter M. Ozias* (lic. Galați). *Simionescu Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stoica N. Anreliu* (lic. Cantemir, București), *Stoicescu Teodor* (lic. Internat, Iași), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Tarăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu M. D-tru* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, București). *Țanovici V. C-tin* (lic. Ploești), *Vasiliu Ion* (lic. M-rea Dealu) și *Vulpanovici Boriș* (lic. Chișinău).

Altă soluție dată de d-l Ștefănescu Emil.

Fie N unul din numerele cerute; avem:

$$N = 41p + 5 = 19q + 6$$

$$41p - 19q = 1.$$

Atunci p și q sunt dați de relațiile:

$p = (-1)^{i-1} Q_i + 19n$ și $q = (-1)^{i-1} P_i + 41n$,

n fiind un întreg oarecare, iar $\frac{P_i}{Q_i}$ fiind ultima redusă a fracției $\frac{41}{19}$, transformată în fracție continuă. (Cours d'Algébre par *B. Niewenglowski*, ediția IV, vol. I, pag. 330.)

Dar:

$\frac{41}{19} = 2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{3}}$, deci $\frac{P_i}{Q_i} = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$ și $i = 2$,

rezultă:

$$p = -Q_i + 19n \text{ și } q = -P_i + 41n.$$

Cum $P_i = 13$ și $Q_i = 6$,

urmează că:

$$p = 19n - 6 \text{ și } q = 41n - 13,$$

deci:

$$N = 41(19n - 6) + 5 = 779n - 241.$$

Pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$ obținem:

$$N = 538, 1317, 2096, \ldots$$

numere care formează o progresie geometrică cu rația 779.

PROBLEME PROPUSE

480. — Să se găsească un număr de trei cifre, egal cu cubul cifrei unităților și cu pătratul răsturnatului numărului rămas la stânga sa după suprimarea cifrei unităților.

ALEXANDRU PAMULA

481.* — Să se găsească numerile întregi astfel ca scriind la dreapta lor numărul următor, se obțin numere de 6 cifre, patrate perfecte.

T. STOICESCU

482.* — Un triunghiu ABC, are fixe punctele B_1 și C_1 picioarele înălțimelor care pleacă din punctele B și C, iar dreapta BC este constantă în lungime. Să se afle locul geometric al vârfurilor A, B și C.

GH. CONSTANTINESCU

483. — Două cercuri O și O′ se taie în M și N. Printr'un punct P de pe MN se duc două coarde perpendiculare AB în cercul O și CD în O′. Perpendicularele duse din O și O′ respectiv pe AB și CD se taie în O_1. Fie A_1 și C_1 simetricele lui A și C în raport cu O_1. Să se demonstreze că dreptele A_1B și C_1D sunt perpendiculare.

EMIL STEFANESCU

484.* — Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinele ecuației $x^3 + px + q = 0$, să se formeze ecuațiile care au ca rădăcini:

$$x_1^2 + x_2x_3, \quad x_2^2 + x_1x_3, \quad x_3^2 + x_1x_2;$$

$$x_1^2 - x_2x_3, \quad x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2, \quad x_3^2 - x_1x_2.$$

I. DUMITRIU—ARAD

485.* — Să se calculeze pentru $x = 0$, limita expresiunii:

$$E = \frac{(1 + a \sin x)^{\frac{1}{x}} - e^a}{\sin^2 x}.$$

V. ALACI

486. — Să se stabilească relațiunea:

$$\frac{4R}{abc} \sum \frac{r_a r_b (r_a + r_b - r)}{\operatorname{cotg} \frac{c}{2}} = 8R - r,$$

notațiile fiind cele obicinuite.

RAPEANU N. VIRGIL

INFORMATIUNI

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare, problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată şi să iscălească.

Primim încă dela unii corespondenţi mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacţie se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e uşor de înţeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecinţă rugăm pe corespondenţii noştri să redacteze fiecare problemă separat, şi când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat şi prinse la problemă. Atragem în acelaşi timp atenţia harnicilor noştri corespondenţi să pue mai multă atenţie şi osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond şi formă.

Anunţăm că examenul de intrare la Şcoala Politechnică din Timişoara, are loc cu începere de 19 Octombrie 1925.

Abonamentul pe anul V-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

60 (ŞASEZECI LEI)

şi se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Directorul Şcoalei Superioare P. T. T.

Timişoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL V. 15 OCTOMBRIE 1925 NO. 8.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 6 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 60 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI. AFLAREA DIRECTA A CATULUI A DOUA POLINOAME.
2. NOTE MATEMATICE, 11, 12.
3. BIBLIOGRAFIE.
4. PROBLEME REZOLVATE: 170, 351, 434, 452, 454.
5. PROBLEME PROPUSE.
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 60 lei
Anul III, broşat, 60 lei
Anul IV, broşat, 60 lei.

ANUL V. — No. 8. TIMISOARA, 15 OCTOMBRIE 1925.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 6 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 60 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politechnica din Timisoara

AFLAREA DIRECTA A CATULUI A DOUA POLINOAME

de V. ALACI

1. Admitem că polinomul:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_m x^m$$

se divide prin $(1-x)^q$ şi ne propunem a găsi direct câtul, care evident este de forma:

$$A_0 + A_1 x + \ldots + A_i x^i + \ldots + A_{m-q} x^{m-q}.$$

Dacă notăm:

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$$
$$v = (1-x)^{-q},$$

atunci avem:

$$(1)\quad u.v = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_i x^i + \ldots + A_m x^m,$$

unde coeficienţii A_i trebuesc calculaţi.

Pentru a calcula un coeficient oarecare A_i, derivăm de i ori egalitatea (1) şi în urmă facem $x=0$. Vom observa că în primul membru avem de luat derivata de ordinul i a produsului $u.v$ şi deci vom folosi formula lui *Leibnitz*, obţinem astfel:

$$(2)\quad i!\,A_i = \left| D^i u.v \right|_{x=0} = \left| u v^{(i)} + C_i^1 u' v^{(i-1)} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + C_i^{i-1} u^{(i-1)} v' + u^{(i)} v \right|_{x=0}.$$

Pentru $x=0$, avem $|u|_{x=0} = a_0$, $|v|_{x=0} = 1$, şi rămâne să calculăm derivatele de diferite ordine a lui u şi v, în care să facem apoi $x=0$.

Observăm că avem:

$$(3)\quad \left| u^{(k)} \right|_{x=0} = k!\,a_k, \quad k = 0,\ 1,\ 2, \ldots m.$$

$$(4)\quad \left| v^{(h)} \right|_{x=0} = q(q+1)\ldots(q+h-1)$$
$$= h!\,\Gamma_q^h, \quad h = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$$

unde Γ_q^h înseamnă numărul combinărilor cu repetiţie a q obiecte luate câte h. Inlocuind în (2) pe u, v şi derivatele lor de diferite ordine pentru $x=0$, date de relaţiile (3) şi (4), avem:

$$(5)\quad i!\,A_i = a_0\, i!\,\Gamma_q^i + C_i^1 a_1 (i-1)!\,\Gamma_q^{i-1}$$
$$+ C_i^2\, 2!\, a_2 (i-2)!\,\Gamma_q^{i-2} + \ldots + C_i^i\, i!\, a_i \Gamma_i^0$$
$$= \sum_{\lambda=0}^{i} C_i^\lambda\, a_\lambda\, \lambda!\,(i-\lambda)!\,\Gamma_q^{i-\lambda}.$$

Cum însă:

$$C_i^\lambda \lambda!\,(i-\lambda)! = \frac{i(i-1)\ldots(i-\lambda+1)}{\lambda!}\,\lambda!\,(i-\lambda)! = i!,$$

relaţiunea (5) simplificată cu $i!$, devine;

$$(6)\quad A_i = \sum_{\lambda=0}^{i} a_\lambda \Gamma_q^{i-\lambda}, \quad i = 0,\ 1,\ 2, \ldots m-q.$$

Relaţiunea (6) cuprinde într'o formă simplă, expresiunea coeficienţilor A_i, ce ne propusesem ai afla.

In virtutea relaţiunei (6) pe care o dezvoltăm, putem scri:

$$(7)\quad \begin{cases} A_0 = a_0 \\ A_1 = q\,a_0 + a_1 \\ A_2 = \dfrac{q(q+1)}{1.2}\,a_0 + q\,a_1 + a_2. \\ A_3 = \dfrac{q(q+1)(q+2)}{3!}\,a_0 + \dfrac{q(q+1)}{2!}\,a_1 + q\,a_2 + a_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_i = \dfrac{q(q+1)\ldots(q+i-1)}{i!}\,a_0 + \\ \quad \dfrac{q(q+1)\ldots(q+i-2)}{(i-1)!}\,a_1 + \ldots + q\,a_{i-1} + a_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{m-q} = \dfrac{q(q+1)\ldots(m-1)}{(m-q)!}\,a_0 + \\ \dfrac{q(q+1)\ldots(m-2)}{(m-q-1)!}\,a_1 + \ldots + q\,a_{m-q-1} + a_{m-q}. \end{cases}$$

Aplicație. Polinomul:

$$1 - 5x + 9x^2 - 6x^3 - x^4 + 3x^5 - x^6$$

divizându-se prin $(1-x)^3$, *să se afle direct câtul.*

Putem scri:

$$\frac{1 - 5x + 9x^2 - 6x^3 - x^4 + 3x^5 - x^6}{(1-x)^3} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3,$$

unde coeficienții A_i $(i=0, 1, 2, 3)$ îi calculăm cu relațiile (7), avem:

$$A_0=1,\ A_1=3.1-5=-2,\ A_2=6.1-3.5+9=0,$$
$$A_3=10.1-6.5+3.9-6=1.$$

Rezultă atunci:

$$\frac{1-5x+9x^2-6x^3-x^4+3x^5-x^6}{(1-x)^3} = 1-2x+x^3.$$

2. Privind relațiile (7), vedem că coeficienții câtului depind numai de primii $m-q+1$ coeficienți ai deîmpărțitului, cari pot fi oricare, restul de q coeficienți ai deîmpărțitului trebuesc să verifice q anumite relațiuni ce le vom vedea, pentru ca împărțirea polinoamelor propuse mai sus, să se poată face exact.

In adevăr conform împărțirei exacte, trebuie să avem:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = (1-x)^q \times (A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-q} x^{m-q})$$

sau:

$$(8)\quad a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = [1 - C_q^1 x + C_q^2 x^2 - \ldots \ldots + (-1)^q C_q^q x^q] \cdot (A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-q} x^{m-q})$$

Identificând coeficienții acelorași puteri a lui x din cei doi membri ai egalității (8), avem:

$$(9)\quad \begin{cases} a_0 = A_0. \\ a_1 = A_1 - C_q^1 A_0 \\ a_2 = A_2 - C_q^1 A_1 + C_q^2 A_0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m-q} = A_{m-q} - C_q^1 A_{m-q-1} + \ldots \\ \qquad \ldots + (-1)^q C_q^q A_{m-2q} \\ a_{m-q+1} = -C_q^1 A_{m-q} + C_q^2 A_{m-q-1} + \ldots \\ \qquad \ldots + (-1)^q C_q^q A_{m-2q+1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m-2} = (-1)^{q-2}\,(C_q^{q-2} A_{m-q} \\ \qquad - C_q^{q-1} A_{m-q-1} + C_q^q A_{m-q-2}) \\ a_{m-1} = (-1)^{q-1}\,(C_q^{q-1} A_{m-q} - C_q^q A_{m-q-1}) \\ a_m = (-1)^q C_q^q A_{m-q}. \end{cases}$$

Ultimele q relații sunt tocmai cele q condiții amintite mai sus pentru ca împărțirea celor două polinoame date să se facă exact.

Condițiile de divizibilitate a polinomului:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

prin $(1-x)^q$, sunt:

$$(10)\quad \begin{cases} a_m = (-1)^q A_{m-q} \\ a_{m-1} = (-1)^{q-1}\,(q\,A_{m-q} - A_{m-q-1}) \\ a_{m-2} = (-1)^{q-2}\left[\dfrac{q(q-1)}{2!}\,A_{m-q} \right. \\ \qquad \left. - q\,A_{m-q-1} + A_{m-q-2}\right] \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m-q+1} = -q\,A_{m-q} + \dfrac{q(q-1)}{2!}\,A_{m-q-1} \\ \qquad + \ldots + (-1)^q A_{m-2q+1}, \end{cases}$$

unde A_{m-q}, $A_{m-q-1}, \ldots A_{m-2q+1}$ sunt date de relaţiile (6) sau (7).

Cazuri particulare. 1°. *Condiţia ca polinomul:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$

să se dividă prin $1 - x$.

In acest caz $q = 1$, avem deci o singură condiţie, prima din relaţiile (10), unde A_{m-q} este dat de ultima din relaţiile (7) în care facem $q = 1$, avem deci:

$$a_m = -(a_0 + a_1 + \ldots + a_{m-1})$$

sau:

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{m-1} + a_m = 0.$$

condiţie, care se poate scrie, privind polinomul dat:

$$f(1) = 0,$$

şi care condiţie este de altfel bine cunoscută şi dedusă din alte consideraţiuni de ordin algebric.

2°. *Condiţiile cu polinomul:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$

să se dividă prin $(1 - x)^2$.

In acest caz $q = 2$, avem deci două condiţii, primele două din relaţiile (10) unde trebue să facem $q = 2$, şi în care A_{m-2}, A_{m-3}, vor fi înlocuite prin valorile date de ultimele două relaţii din (7), obţinem astfel:

$$(11)\quad a_m = (m-1)a_0 + (m-2)a_1 + \ldots$$
$$\ldots + 2a_{m-3} + a_{m-2} = \sum_{i=0}^{m-2} (m-1-i)a_i$$

$$(12)\quad a_{m-1} = -2[(m-1)a_0 + (m-2)a_1 + \ldots$$
$$+ 2a_{m-3} + a_{m-2}] + (m-2)a_0 + (m-3)a_1 + \ldots$$
$$\ldots + 2a_{m-4} + a_{m-3} = -[m a_0 + (m-1)a_1 +$$
$$(m-2)a_2 + \ldots + 3a_{m-3} + 2a_{m-2}] = -\sum_{i=0}^{m-2} (m-i)a_i$$

Observare. Condiţiile (11) şi (12) se pot înlocui prin altele echivalente, în felul următor:

Intâi adunăm relaţiile (11) şi (12) şi avem:

$$a_m + a_{m-1} = -(a_0 + a_1 + \ldots + a_{m-2})$$

sau:

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{m-1} + a_m = 0,$$

condiţie care se mai poate scrie privind polinomul dat.

$$(13)\qquad f(1) = 0.$$

Acum înmulţim relaţia (11) cu m şi (12) cu $(m-1)$, adunând, obţinem:

$$m\,a_m + (m-1)\,a_{m-1} = \sum_{i=0}^{m-2} [m(m-1-i)$$
$$-(m-1)(m-i)]\,a_i = -\sum_{i=0}^{m-2} i\,a_i$$

$$^{*}_{*}{}^{*}\quad a_1 + 2a_2 + \ldots + (m-2)a_{m-2}$$
$$+ (m-1)a_{m-1} + m\,a_m = 0,$$

condiţie care se mai poate scri privind polinomul dat:

$$(14)\qquad f'(1) = 0.$$

Condiţiile (11) şi (12) se pot înlocui prin condiţiile clasice (13) şi (14), stabilite prin alte consideraţii algebrice. Invers, am putea deduce din condiţiile (13) şi (14) condiţiile (11) şi (12), pe care le-am stabilit pe altă cale.

3°. *Condiţiile ca polinomul:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$

să se dividă prin $(1 - x)^3$.

In acest caz $q = 3$, avem deci trei condiţii, primele trei din relaţiile (10) pentru $q = 0$ şi în care A_{m-3}, A_{m-4}, A_{m-5} trebuesc înlocuiţi cu valorile lor date prin ultimele trei relaţii din (7), obţinem astfel:

$$(15)\quad a_m = -\left[\frac{(m-2)(m-1)}{2!}a_0 + \frac{(m-3)(m-2)}{2!}a_1 + \right.$$
$$\left. \ldots + 3a_{m-4} + a_{m-3}\right] = \sum_{i=0}^{m-3} \frac{(m-2-i)(m-1-i)}{2!}a_i$$

$$(16)\quad a_{m-1} = 3\sum_{i=0}^{m-3} \frac{(m-2-i)(m-1-i)}{2!}a_i -$$
$$\sum_{i=0}^{m-3} \frac{(m-3-i)(m-2-i)}{2!}a_i = \sum_{i=0}^{m-3} (m-1-i)(m-2-i)\,a_i$$

$$(17)\quad a_{m-2}=-3\sum_{i=0}^{m-3}\frac{(m-2-i)(m-1-i)}{2!}a_i+$$

$$3\sum_{i=0}^{m-3}\frac{(m-3-i)(m-2-i)}{2!}a_i-$$

$$\sum_{i=0}^{m-3}\frac{(m-4-i)(m-3-i)}{2!}a_i=-$$

$$3\sum_{i=0}^{m-3}\frac{(m-2-i)(m-1-i)}{2!}+2\sum_{i=0}^{m-3}\frac{(m-1-i)(m-3-i)}{2!}a_i$$

$$=-\sum_{i=0}^{m-3}\frac{(m-i)(m-1-i)}{2!}a_i$$

Observare. Condiţiile (15), (16) şi (17) se pot înlocui prin altele echivalente, în felul următor:

Adunăm relaţiile (15), 16) şi (17), avem:

$$a_m+a_{m-1}+a_{m-2}=$$

$$\sum_{i=0}^{m-3}\frac{(m-i)[-m+2+i+2m-4-2i-m+1+i]}{1.2}a_i$$

$$+\sum_{i=0}^{m-3}\frac{(m-2-i)}{1.2}a_i=-\sum_{i=0}^{m-3}\frac{(m-i)}{2!}a_i$$

$$+\sum_{i=0}^{m-3}\frac{(m-2-i)}{2!}a_i=-\sum_{i=0}^{m-3}a_i$$

sau:

$$a_0+a_1+\ldots+a_{m-3}+a_{m-2}+a_{m-1}+a_m=0,$$

condiţie care se poate scri privind polinomul dat:

$$(18)\qquad f(1)=0.$$

Altă condiţie obţinem, multiplicând relaţiile (15) (16) şi (17) respectiv cu m, $m-1$, $m-2$, şi adunându-le, avem:

$$m\,a_m+(m-1)\,a_{m-1}+(m-2)\,a_{m-2}$$

$$=-m\sum_{i=0}^{m-3}a_i-\sum_{i=0}^{m-3}(m-i)(m-2-i)\,a_i$$

$$+\sum_{i=0}^{m-3}(m-i)(m-1-i)\,a_i=-m\sum_{i=0}^{m-3}a_i$$

$$+\sum_{i=0}^{m-3}(m-i)\,a_i=-\sum_{i=0}^{m-3}i\,a_i$$

sau:

$$a_1+2\,a_2+\ldots+(m-3)\,a_{m-3}+(m-2)\,a_{m-2}$$

$$+(m-1)a_{m-1}+m\,a_m=0,$$

condiţie care se poate scri privind polinomul dat:

$$(19)\qquad f'(1)=0.$$

În fine a 3-a condiţie se obţine, multiplicând relaţiile (15), (16) şi (17) respectiv cu $m(m-1)$, $(m-1)(m-2)$, $(m-2)(m-3)$ şi adunându-le, obţinem:

$$m(m-1)a_m+(m-1)(m-2)a_{m-1}+(m-2)(m-3)a_{m-2}$$

$$=-m(m-1)\sum_{i=0}^{m-3}a_i-\sum_{i=0}^{m-3}2(m-1)(m-i)(m-2-i)a_i$$

$$+\sum_{i=0}^{m-3}(2m-3)(m-i)(m-1-i)a_i$$

$$=-m(m-1)\sum_{i=0}^{m-3}a_i+\sum_{i=0}^{m-3}(m-i)(m+i-1)a_i$$

$$=\sum_{i=0}^{m-3}-i(i-1)a_i$$

sau:

$$2.1\,a_2+3.2\,a_3+\ldots+(m-3)(m-4)\,a_{m-3}$$

$$+(m-2)(m-3)\,a_{m-2}+(m-1)(m-2)\,a_{m-1}$$

$$+m(m-1)\,a_m=0,$$

condiţie care se poate scri privind polinomul dat:

$$(20)\qquad f''(1)=0.$$

Condiţiile (15), (16) şi (17) pot fi deci înlocuite prin condiţiile clasice (18), (19) şi (20) stabilite prin alte consideraţiuni algebrice. Invers, din condiţiile (18), (19) şi (20) putem deduce condiţiile (15), (16) şi (17) pe care le-am stabilit pe altă cale.

Aplicaţii. Putem soluţiona prin metoda expusă multe probleme tratate în diferite cărţi şi reviste prin alte metode, probleme în care se cere *„să se dovedească că un anumit polinom este divizibil prin* $(1-x)^q$, *cerându-se şi câtul“*. Vom trata următoarea problemă din „G. M.“, an. XXX, Iulie 1925, pag. 430.

Să se verifice că polinomul:

$$P(x)=x^n+(2n-7)x^{n-1}-2(n-2)x^{n-2}+x+1,$$

se divide cu $(x-1)^2$. *Să se găsească expresia generală a câtului.*

Scrim condițiile (11) și (12) găsite la No. 2, însă adaptate cazului nostru, în care:

$$(21)\quad q=2,\ a_0=a_1=1,\ a_2=a_3=\ldots=a_{n-3}=0,$$

$$a_{n-2}=-2(n-2),\ a_{n-1}=2n-7,\ a_n=1,$$

și avem:

$$1=n-1+n-2-2(n-2)=1$$

$$2n-7=-[n+n+1-4(n-2)]=2n-7.$$

Vedem că aceste condiții sunt identic verificate, deci polinomul $P(x)$ e divizibil prin $(x-1)^2$.

Să găsim câtul.

Câtul fiind de gradul $n-2$ este de forma:

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_ix^i+\ldots+A_{n-2}x^{n-2}$$

unde coeficienții după cele stabilite la § 1, sunt date de relația (6):

$$A_i=\sum_{\lambda=0}^{i}a_\lambda\,\Gamma_2^{i-\lambda},$$

sau de relațiile (7). In virtutea relațiilor (7) și (21) putem deci scrie:

$$A_0=1$$

$$A_1=2+1=3$$

$$A_2=3+2=5$$

$$A_3=4+3=7$$

. . . . . .

$$A_i=\frac{2.3\ldots(i+1)}{i!}+\frac{2.3\ldots i}{(i-1)!}$$

$$=i+1+i=2i+1,\ i=0,\ 1,\ 2,\ldots n-3$$

. . . . . .

$$A_{n-2}=\frac{2.3\ldots(n-1)}{(n-2)!}+\frac{2.3\ldots(n-2)}{(n-3)!}$$

$$-2(n-2)=n-1+(n-2)-2(n-2)=1.$$

Câtul $Q(x)$ căutat are deci următoarea expresiune:

$$Q(x)=1+3x+5x^2+\ldots+(2n-5)x^{n-3}+$$

$$x^{n-2}=x^{n-2}+\sum_{i=0}^{n=3}(2i+1)x^i.$$

3. Să presupunem acum că polinomul:

$$a_0+a_1x+\ldots+a_m\,x^m,$$

nu se divide cu $(1-x)^q$, că adică condițiile (10) sau unele din ele nu se verifică identic. În acest caz notăm membrii al 2-lea din (10) respectiv cu $B_0,\ B_1,\ \ldots,\ B_{q-1}$, adică:

$$(22)\quad\begin{cases}(-1)^q A_{m-q}=B_0\\ (-1)^{q-1}(qA_{m-q}-A_{m-q-1})=B_1\\ (-1)^{q-2}\left[\frac{q(q-1)}{2!}A_{m-q}-qA_{m-q-1}+\right.\\ \qquad\qquad\left.A_{m-q-2}\right]=B_2\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ -qA_{m-q}+\frac{q(q-1)}{2!}A_{m-q-1}+\ldots\\ \qquad\qquad+(-1)^qA_{m-2q+1}=B_{q-1}.\end{cases}$$

Însemnăm încă prin $C_0,\ C_1,\ \ldots\ C_{q-1}$, diferențele între cei doi membri ai relațiilor (10), adică:

$$(23)\quad a_m-B_0=C_0,\qquad a_{m-1}-B_1=C_1,$$

$$a_{m-2}-B_2=C_2\ \ldots\ a_{m-q+1}-B_{q-1}=C_{q-1}.$$

Acum polinomul dat se poate scri:

$$a_0+a_1x+\ldots+a_{m-q}x^{m-q}+a_{m-q+1}x^{m-q+1}+$$

$$\ldots+a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m=a_0+a_1x+\ldots$$

$$\ldots+a_{m-q}x^{m-q}+B_{q-1}x^{m-q+1}+\ldots+B_1x^{m-1}$$

$$+B_0x^m+(C_{q-1}x^{m-q+1}+\ldots+C_1x^{m-1}+C_0x^m).$$

Partea care nu este în paranteză se divide cu $(1-x)^q$ și putem scri:

$$(24)\quad\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_mx}{(1-x)^q}=A_0+A_1x\ldots+A_ix^i+\ldots$$

$$+A_{m-q}x^{m-q}+\frac{C_{q-1}x^{m-q+1}+\ldots+C_1x^{m-1}+C_0x^m}{(1-x)^m}$$

unde:

$$A_i=\sum_{i=0}^{i}a_\lambda\Gamma_q^{i-\lambda},\quad i=0,\ 1,\ldots m-q.$$

Evident că numărătorul fracției din membrul al 2-lea din relația (24) nu poate fi privit drept restul împărțirei, fiind de gradul $m \geqq q$.

Formula (24) își are rostul ei pentru că o vom folosi în cele ce urmează, pentru a afla direct nu numai câtul dar și restul împărțirei din primul membru.

Aflarea directă a câtului și restului a două polinoame.

4. Fie de aflat direct câtul și restul polinomului:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$

prin:

$$(1-x)^q$$

Făcând schimbarea:

$$x = \frac{1}{y}. \tag{25}$$

putem scri:

$$\frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{(1-x)^q} = (-1)^q \frac{a^m + a_{m-1} y + \ldots + a_q y^{m-q} + a_{q-1} y^{m-q+1} + \ldots + a_1 y^{m-1} + a_0 y^m}{y^{m-q}(1-y)^q} \tag{26}$$

In virtutea relației (24), polinomul:

$$a_m + a_{m-1} y + \ldots + a_q y^{m-q} + a_{q-1} y^{m-q+1} + \ldots + a_1 y^{m-1} + a_0 y^m$$

împărțindu-l prin $(1-y)^q$, se poate scri:

$$\frac{a_m + a_{m-1} y + \ldots + a_0 y^m}{(1-y)^q} = A_0 + A_1 y + \ldots + A_{m-q} y^{m-q} + \frac{C_{q-1} y^{m-q+1} + \ldots + C_1 y^{m-1} + C_0 y^m}{(1-y)^q}$$

unde:

$$A_i = \sum_{\lambda=0}^{i} a_{m-\lambda} \Gamma_q^{i-\lambda}, \quad i = 0, 1, \ldots m-q. \tag{27}$$

$$C_0 = a_0 - B_0, \; C_1 = a_1 - B_1, \ldots C_{q-1} = a_{q-1} - B_{q-1} \tag{28}$$

$$\left\{\begin{aligned}
B_0 &= (-1)^q A_{m-q} \\
B_1 &= (-1)^{q-1} (q A_{m-q} - A_{m-q-1}) \\
B_2 &= (-1)^{q-2} \left[\frac{q(q-1)}{2!} A_{m-q} - q A_{m-q-1} + A_{m-q-2} \right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_{q-1} &= -q A_{m-q} + \frac{q(q-1)}{2} A_{m-q-1} - \ldots + (-1)^q A_{m-2q+1}
\end{aligned}\right. \tag{29}$$

$A_{m-q}, A_{m-q-1}, \ldots A_{m-2q+1}$, fiind dați de relația (27).

Formulele (27), (28) și (29) se deosebesc de formulele (6), (23) și (22) numai prin aceia că coeficienții $a_0, a_1, \ldots a_m$ sunt înlocuiți respectiv prin $a_m, a_{m-1}, \ldots a_0$.

Rezultă că relația (26) se poate scri acum:

$$(-1)^q \frac{a_m + a_{m-1} y + \ldots + a_0 y^m}{y^{m-q}(1-y)^q} = \frac{(-1)^q}{y^{m-q}} \left[A_0 + A_1 y + \ldots + A_{m-q} y^{m-q} + y^{m-q+1} \frac{C_{q-1} + C_{q-2} y + \ldots + C_0 y^{q-1}}{(1-y)^q} \right]$$

Dacă folosim aci transformarea (25) în sens invers, adică luăm $y = \frac{1}{x}$, avem:

$$\frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{(1-x)^q} = (-1)^q (A_0 x^{m-q} + A_1 x^{m-q-1} + \ldots + A_{m-q}) + \frac{C_0 + C_1 x + \ldots + C_{q-1} x^{q-1}}{(1-x)^q} \tag{30}$$

unde coeficienții din membrul al 2-lea sunt dați de relațiile (27), (28) și (29).

Formula (30) este foarte importantă, ea ne dă direct câtul și restul împărțirei polinomului:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

prin $(1-x)^q$, câtul fiind:

$$(-1)^q (A_0 x^{m-q} + A_1 x^{m-q-1} + \ldots + A_{m-q}),$$

iar restul fiind:

$$C_0 + C_1 x + \ldots + C_{q-1} x^{q-1}$$

Aplicație. Să se afle direct câtul și restul împărțirei polinomului:

$$3 - 5x + 6x^2 - 2x^3 - x^4 + 5x^5,$$

prin $(1-x)^3$.

Formula (30) ne permite a scri:

$$\frac{3-5x+6x^2-2x^3-x^4+5x^5}{(1-x)^3} = -$$

$$(A_0x^2+A_1x+A_2)+\frac{C_0+C_1x+C_2x^2}{(1-x)^3},$$

unde în virtutea relației (27) avem privind polinomul dat:

$$A_0=5,\ A_1=5\Gamma_3^1-\Gamma_3^0=5\cdot\frac{2\cdot3}{2!}-1=14,$$

$$A_2=5\Gamma_3^2-\Gamma_3^1-2\Gamma_3^0=25.$$

Asemenea relațiile (28) ținând seamă de (29) și de coeficienții polinomului dat, ne dau:

$$C_0=3+A_2=3+25=28,$$

$$C_1=-5-(3A_2-A_1)=-5-75+14=-66,$$

$$C_2=6+(3A_2-3A_1+A_0)=6+75-42+5=44.$$

Rezultă atunci:

$$\frac{3-5x+6x^2-2x^3-x^4+5x^5}{(1-x)^3}$$

$$=-(5x^2+14x+25)+\frac{28-66x+44x^2}{(1-x)^3}$$

(Va urma).

NOTE MATEMATICE

11. *Asupra problemei 420.* Soluția acestei probleme se poate obține pe o cale mai directă de cât cea dată la pagina 91. — Fie N un număr de 2 cifre. — După enunț patratul ce se cere se poate scrie:

$$K^2=N\times10000+2N\times100+6N=10206\times N$$

cu condiția: $6N<100$.

Dar:

$$10206=29^2\times7\times2=29^2\times14.$$

Deci va trebui să avem:

$$K^2=29^2\times14\times N.$$

Pentru ca membrul al doilea să fie patrat perfect este destul ca:

$$N=14\times x^2$$

$$^{*}_{*}{}^{*}\quad 6N=84\times x^2.$$

Cum $6N<100$ urmează că $x=1$ și deci $N=14$. Patratul cerut este prin urmare:

$$142884=378^2.$$

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

12. *Asupra probl. 134, pag. 7, an. III R. M. T.* În cele ce urmează, voiu încercà să generalizez această problema, căutând a găsi condiția de divizibilitate a funcțiunii:

$F(x)\equiv x^m-1$, prin funcțiunea $f(x)\equiv x^n-1$

$(m>n,\ m$ și n întregi).

1. Utilizând, în acest scop, teoria rădăcinilor ecuațiunilor binoame, obținem, pentru mai sus zisa problemă, o soluție pe cât de simplă, pe atât de interesantă.

În adevăr, rădăcinele funcțiunii $f(x)$, fiind date de formula:

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

$$k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n$$

condiția necesară și suficientă a divizibilității propuse va fi ca $F(x)$ să admită toate aceste rădăcini, adică să se anuleze pentru:

$$x=x_k \qquad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

Exprimând această condiție, vom avea:

$$F(x_k)=\left[\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right]^m-1=0.$$

Sau, ținând seama de formula lui *Moivre,* putem scrie:

$$\cos\frac{2mk\pi}{n}+i\sin\frac{2mk\pi}{n}=1.$$

De unde rezultă:

$$\frac{2mk\pi}{n}=2k'\pi \quad (k' \text{ întreg})$$

Sau:

$$\frac{m}{n}\cdot k=k'.$$

Însă această din urmă egalitate trebuind să existe pentru toate valorile lui $k\,(k=1, 2, 3, \ldots, n)$ deducem în mod imperios:

(1) $$m = np \qquad (p \text{ întreg})$$

căpătând astfel condiția cerută.

2. O soluție tot atât de simplă și elegantă ca și cea precedentă, la care se poate pretà această problemă, e următoarea.

Aplicând formula de însumare a progresiilor geometrice, avem:

$$x^{m-n} + x^{m-2n} + x^{m-3n} + \ldots + x^{m-pn} = \frac{x^m - x^{m-pn}}{x^n - 1},$$

P fiind în așà fel ales încât:

(2) $$n < m - pn \leq 0.$$

Însă: $\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $x^m - x^{m-pn} = M\,(x^n - 1)$.

Deci: $x^m - 1 = x^m - x^{m-pn} + x^{m-pn} - 1$.

(3) $$F(x) = M\,(x^n - 1) + (x^{m-pn} - 1).$$

Restul împărțirii lui $F(x)$ prin $f(x)$ fiind $x^{m-pn}-1$, după cum rezultă din (2) și (3), condiția necesară și suficientă este ca acest rest să fie identic nul, adică:

$$x^{m-pn} - 1 \equiv 0$$

$\overset{*}{*}\overset{*}{*}$ $$m = pn$$

Înlocuind în (1) pe m și n respectiv prin $(n-1)$ și 3 obținem:

$$n = 3p + 1$$

condiția problemei 134.

STOENESCU AL. I.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXI, No. 1, Septembrie 1925. Lista Membrilor Societății „Gazeta Matematică". † Membri decedați. Treizeci de ani, de *G. Țițeica*. Din Corespondent, Membru în Societatea *„Gazeta Matematică"*, de *G. Nichifor*. Proprietați ale triunghiului, de *N. Blaha*. *† Alexandru Stoica*, de † Sub-Locot. *Vintilă Grigorescu*. Localul Societății „Gazeta Matematică", de *I. Ionescu*. Premiile și alte dispoziții ale fondurilor „Gazetei Matematice".

2. *Foaia Matematică*, anul II, No. 9, Septembrie 1925 Asupra ecuațiilor algebrice cu toate rădăcinele reale, de *Petre Sergescu*.

3. *Curierul Matematic*, vol. I, No. 7, Septembrie 1925. Proprietăți în legătură cu triunghiurile pedale (urmare), de *O. Bolgiu*.

4. *Insemnări Matematice*, anul I, No. 8, Iulie 1925. Câteva identități generale, de *Angelo Ionescu*.

5. *Arta de a geometru*, de *Micu Grünbaum*.

6. *Lecțiuni de Trigonometrie*, de *N. Abramescu* și *V. Lupan*. Acest tratat se deosebește de cele obicinuite, prin aceea că pornește în mod natural de la aplicațiile din viața practică, începe cu rezolvarea triunghiurilor, pentru a deduce de aci acele formule importante de ordin teoretic, care formează o armătură importantă în rezolvirea diferitelor chestiuni de ordin practic și teoretic. Teoria expusă este presărată de numeroase aplicațiuni, este clară și ușor de urmărit, ceeace face ca acest tratat de Trigonometrie să aducă reale foloase învățământului secundar, ca și toate celel'alte tratate a d-lui Profesor Universitar *N. Abramescu*, de aceea o recomandăm călduros, corespondenților nostri.

PROBLEME REZOLVATE

170. — *Știind că* $\cos x$, $\cos y$, $\cos z$ *sunt rădăcinele ecuației* $x^3 + px + q = 0$, *să se formeze ecuația de gradul al 3-lea ale cărei rădăcini sunt*

$$tg^2\frac{x}{2},\ tg^2\frac{y}{2},\ tg^2\frac{z}{2}.$$

CRISTEA P. GOILAV.

Relațiele cunoscute între rădăcinile și coeficienții unei ecuații ne permit a scri pentru ecuația dată:

$$(1)\quad \begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = \Sigma \cos x = 0. \\ \cos x \cos y + \cos x \cos z + \cos y \cos z = \\ \qquad \Sigma \cos x \cos y = p. \\ \cos x \cos y \cos z = -q. \end{cases}$$

De altă parte ecuația cerută fiind de forma:

(2) $$x^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

cu rădăcinile $tg^2\frac{x}{2}$, $tg^2\frac{y}{2}$, $tg^2\frac{z}{2}$, între coeficienții și rădăcinele ei există relațiile:

$$(3)\quad \begin{cases} -a = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{z}{2}. \\ b = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2\frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2\frac{z}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{y}{2}\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}. \\ -c = \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}. \end{cases}$$

Cum coeficienții a, b, c trebuesc exprimați în funcție de $\cos x$, $\cos y$, $\cos z$, rădăcinele ecuației date, folosim relația cunoscută:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

și atunci relațiele (3) se pot scri succesiv cu o notație prescurtată:

$$(4)\quad \begin{cases} -a = \sum\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \\ \qquad \frac{\sum(1-\cos x)(1+\cos y)(1+\cos z)}{(1+\cos x)(1+\cos y)(1+\cos z)} = \\ \qquad \frac{3+\sum\cos x - \sum\cos x\cos y - 3\cos x\cos y\cos z}{1+\sum\cos x+\sum\cos x\cos y+\cos x\cos y\cos z}. \\ b = \sum\frac{(1-\cos x)(1-\cos y)}{(1+\cos x)(1+\cos y)} = \\ \qquad \frac{\sum(1-\cos x)(1-\cos y)(1+\cos z)}{(1+\cos x)(1+\cos y)(1+\cos z)} = \\ \qquad \frac{3+\sum\cos x - \sum\cos x\cos y - 3\cos x\cos y\cos z}{1+\sum\cos x+\sum\cos x\cos y+\cos x\cos y\cos z}. \\ -c = \frac{(1-\cos x)(1-\cos y)(1-\cos z)}{(1+\cos x)(1-\cos y)(1+\cos z)} = \\ \qquad \frac{1-\sum\cos x+\sum\cos x\cos y-\cos x\cos y\cos z}{1-\sum\cos x+\sum\cos x\cos y+\cos x\cos y\cos z}. \end{cases}$$

În virtutea relațiunilor (1) relațiile (4) devin:

$$-a = \frac{3-p+3q}{1+p-q},\quad b = \frac{3-p-3q}{1+p-q},\quad -c = \frac{1+p+q}{1+p-q}.$$

Ecuația (2) adusă la formă întreagă, devine astfel:

$$(1+p-q)x^3 - (3-p+3q)x^2 + (3-p-3q)x - (1+p+q) = 0,$$

care este ecuația cerută.

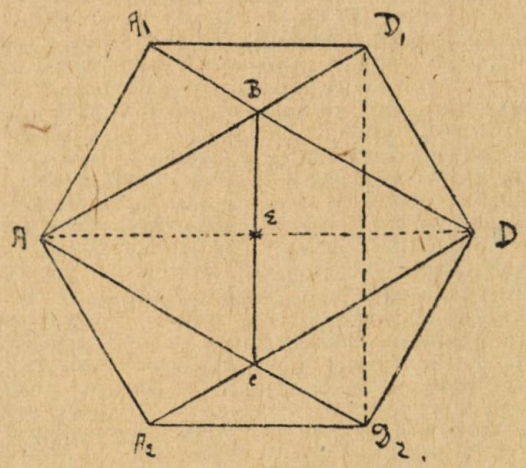
Soluții date de d-nii: *Adam I. M.* (Constanța), *Amărăscu O. Gavril* (Caracal), *Angelescu N. Traian* (Giurgiu), *Antoniu S. Ion* (lic. M-rea Dealu), *Arcadian P. Nicu* (lic. Caracal), *Bărglăzan A.* (Șc. Polit. Timișoara), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bercovici Emil* (lic. Matei-Basarab, București), *Berdan C.* (Șc. Polit. București), *Bernardis N. Bernardo* (Șc. Polit. Timișoara), *Biernaschy C-tin* (Șc. de Artilerie), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoșani), *Bobărnac Mircea* (Șc. Polit. Timișoara), *Bogdan M.* (lic. Caracal), *Ciuta Gavril* (Șc. Polit. Timișoara), *Cocorandu M.* (Șc. Polit. Timișoara), *Constantinescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Coșereanu Ion* (Șc. Polit. Timișoara), *Dimitrescu A. Mișu* (lic. Roman), *Dordea A. Traian, Dragomirescu-Buzne Eduard* (Șc. de Artilerie), *Dumitrescu G. Marin* (lic. Carol, Craiova), *Flickstein I.* (Cernăuți), *Florea C. Alex.* (lic. Internat, Iași), *Focșeneanu I. M.* (lic. M-rea Dealu), *Frătici Ioan* (Șc. Polit. Timișoara), *Georgescu C-tin* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Georgescu C. Ioan* (lic. Pitești), *I. N. Georgescu-Val.* (Șc. de Artilerie), *Ghițescu Virgil* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Grofșorean I. Gheorghe* (lic. Arad), *Herșcovici Emanoil* (Galați), *Iliescu E.* (lic. M-rea Dealu), *Ioniță M. Ioan* (Șc. de Artilerie), *Iordache N. Ioan* (student), *Iscovici I. J.* (lic. Pitești), *Katz Pincu* (Galați), *Klein S.* (Galați), *Lăzărescu Th. Jean* (lic. Pitești), *Lăzărescu Fl. Ștefan* (lic. Giurgiu), *Măru D-tru* (lic. Galați), *Mehlmann Theodor* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Miclescu Andrei* (Șc. de Artilerie), *Mihăilescu D. C-tin* (Giurgiu), *Mușta S.* (student, Cluj), *Negretzu Florea* (Pitești), *Nicolau M. Iulian* (lic. Pitești), *Oprișanu Ernest* (student, București), *Pârâianu Nicu* (Șc. Navală), *Popea Gh. Ovidu* (lic. Chișinău), *Popeanu A.*, *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Popovici Th. Ion* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Popovici Tiberiu* (lic. Arad), *Propst Jean* (Șc. Polit. Timișoara), *Ristea Marin*, *Rigani Cr.* (Șc. Polit. Timișoara), *Samoilă D-tru, Schileru C. Dili* (Șc. Polit. Timișoara), *Scripcă Laur.* (lic. Național, Iași), *Schönfeld H. Conrad* (lic. Botoșani), *Scodrano Alex.* (Durostor). *Scorusianu Eugeniu* (București), *Septelici Raul* (Șc. de Artilerie), *Silion Gh. Ion* (lic. Câmpina), *Solomon Nicolae* (Șc. Polit. Timișoara), *Solomon Vilhelm* (lic. Mătei-Basarab, București), *Stamatiu Mihail* (Pitești), *Ștefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret, București), *Stoenescu I. Alexandru* (București), *Tauber Alexandru* (lic. Botoșani), *Tărăbuță C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, București), *Vasilescu Virgil* (lic. Ploești), *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu) și *Weiss Leon* (lic. Galați).

351. — *Din punctul D exterior triunghiului ABC se duc dreptele DB și DC pe care se proiectează vârful A în A_1 și A_2. Se proiectează apoi punctul D pe laturile AB și AC în D_1 și D_2. Cum trebuie să fie triunghiul ABC și cum trebuie găsit punctul D_1 astfel ca exagonul $AA_1D_1DD_2A_2$ să fie regulat?*

V. ALACI

Fie D un punct exterior triunghiului ABC. Proectăm pe D pe AB și AC în D_1 și D_2, iar pe A îl proectăm pe DB și DC în A_1 și A_2 și formăm astfel exagonul $AA_1D_1DD_2A_2$. Admitem că exagonul este regulat. Observăm atunci că triunghiurile AA_1B și AA_2C sunt egale, având: $AA_1 = AA_2$, $\sphericalangle AA_1B = \sphericalangle AA_2C = 90^0$ și $\sphericalangle A_1AB = \sphericalangle A_2AC = 30^0$. Rezultă că $AB = AC$ și deci $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 60^0$, fiindcă $\sphericalangle BAC = 60^0$, triunghiul ABC este deci echilateral. Patrulaterul

ABDC este un romb, având $DC \parallel AB$, $DB \parallel AC$ şi $AB = AC$, diagonalele lui sunt deci perpendiculare şi se taie în părţi egale. Punctul D este deci simetricul lui A faţa de BC.



Aşa dar, triunghiul ABC trebuie să fie echilateral, iar punctul D trebuie luat simetric cu A, faţă pe BC.

Observare. Dacă D ar fi de aceiaşi parte cu A faţă de BC, figura $AA_1D_1DD_2A_2$ n'ar putea fi exagon convex.

Soluţii date de d-nii: *Ardelea Radu* (lic. Braşov), *Avram Iorga* (lic. Bacău), *Beju Traian* (lic. Arad), *Berdan C.* (Şc. Polit. Bucureşti), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Botea G. Nicolae* (Bucureşti), *Braieşter Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Brădeţeanu C. Cornel* (Craiova), *Bruda Nicolae* (lic. Făgăraş), *Caracaş I. Gh.* (lic. Botoşani), *Chirilă Ion* (lic. Internat, Iaşi), *Comănescu Al. Bălteni* (lic. Slatina), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dinescu Florin* (lic. Ploeşti), *Dinu Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Dumitrescu Stelian* (lic. Braşov), *Frătici I.* (Şc. Polit. Timişoara), *Frumuşelu H. Gheorghe* (lic. Braşov), *Gârleşteanu Mihail* (Şc. Polit. Timişoara), *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *Gheorghiu C. Adrian* (lic. Piteşti), *Gheorghiu V.* (lic. Tg.-Jiu), *Goldstein N.* (Şc. Polit. Timişoara), *Grubenmann I. Gr.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Iliescu M.* (lic. M-rea Dealu), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Jojea Nicolae* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Lateş I. Vasile* (Semin. Pedag. Iaşi), *Lindenberg L.* (Bucureşti), *Manafu Valeriu* (lic. M-rea Dealu), *Mihailescu A. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Milner I.* (Edineţi), *Miu M. Ioan* (lic. Caracal), *Nedelcu Gh. Ilie* (lic. Giurgiu), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Novacu A. Valeriu* (lic. Arad), *Pamula Alexandru* (lic. Botoşani), *Păslaru I. N.* (lic. R.-Sărat), *Percea Viorel* (lic. Timişoara), *Podariu Al.* (lic. Piatra-Neamţ), *Pop Iulian* (Cluj), *Popa Petrescu Niculae* (lic. Braşov), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ion* (student), *Purdilă C-tin* (lic. Braşov), *Roşu Alexandru* (lic. M-rea Dealu), *Scripcă Laur.* (lic. Naţional, Iaşi), *Şerban I. Tiberiu* (Făgăraş), *Socaciu Nicolae* (Şc. Poţ. Timişoara), *Spârchez Zeno* (Şc. Polit. Timişoara), *Staicu Irimie* (Braşov), *Stănescu Teodoru* (lic. M-rea Dealu), *Stoian I. Ion* (lic. Braşov), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Vasilescu B.* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timişoara), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov) şi *Voinescu D. Ion* (lic. Cantemir, Bucureşti).

434. — *Să se determine p şi q astfel ca între rădăcinele ecuaţiei:*

$$x^2 + px + q = 0$$

să avem relaţiile:

$$\begin{cases} x'x'' = 2(x' - x'')^2 \\ x' + x'' = (1 - x')(1 - x'') - 1. \end{cases}$$

ATANASIU TH. C-TIN

Efectuand calculele, relaţiile date se pot scri:

$$(1) \quad \begin{cases} 2(x' + x'')^2 = 9x'x'' \\ 2(x' + x'') = x'x''. \end{cases}$$

Dar privind ecuaţia dată, scrim imediat:

$$\begin{cases} x' + x'' = -p \\ x'x'' = q, \end{cases}$$

şi relaţiile (1) devin:

$$\begin{cases} 2p^2 = 9q \\ -2p = q \end{cases}$$

$$\overset{*}{**} \quad 2p^2 + 18p = 0,$$

sau $p = 0$, $p = -q$ şi deci $q = 0$, $q = 18$.

Aşa dar $p = q = 0$ şi $p = -9$, $q = 18$ satisfac enunţul problemei:

Soluţii date de d-nii: *Alter-Cogan L.* (lic. Chişinău), *Agarici D-tru* (lic. milit. Iaşi), *Bădescu Aurelian* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Beju Traian*, *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bernardis B.* (Şc. Polit. Timişoara), *Beşchea G. Nicolae* (lic. Braşov), *Birkenthal Alexandru* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Carabeţeanu Gh. Petre* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Christescu C. Ilie* (Alexandria), *Ciuffu Petre* (lic. R.-Sărat), *Cosma Z. Gheorghe* (Bucureşti), *Cuncic Alfons* (lic. Internat, Iaşi), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Dânga S. Vlad* (Orhei), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dinescu Florin* (lic. Ploeşti), *Dravătz Ioan* (lic. Ploeşti), *Drogeanu N. Paul* (Semin. Pedag. Bucureşti), *Florea V. Gheorghe* (lic. Craiova), *Frumuşelu H. Gheorghe* (lic. Braşov), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Piteşti), *Handjief V.* (Şc. Polit. Timişoara), *Hulubei Telemac* (lic. Internat, Iaşi), *Ioachim Grigore* (lic. milit. Iaşi), *Ionescu Angelo* (Cluj), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu M. I.* (Corabia), *Ionescu Iuliu* (lic. Giurgiu), *Katz Lazăr*

(lic. Botoşani), *Lepădatu Miclea* (lic. Cahul), *Mareş P.* (lic. Bacău). *Marius Mariş* (lic. Arad), *Matak D. Radu* (Semin. Pedag. Bucureşti), *Micula Ovidiu* (lic. Arad), *Mihăilescu Şt. Niculae* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Nicolau C. Ionică* (lic. milit. Craiova), *Niculescu Şt. Emanuel* (lic. mil. Craiova), *Nicolescu I. Emil* (Ploeşti), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Paraschivescu D. Bosnief* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Pâslaru I. N.* (lic. R.-Sărat), *Pop Iulian* (Cluj), *Poponete N. C-tin* (lic. Târgovistea), *Popescu Ep.* (lic. Galaţi), *Popescu Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popovici Aurel* Focşani) *Popovici Th. Ioan*, *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Schächter M. Ozias, Scripcă Laur.* (Iaşi), *Segal Leon* (lic. Botoşani), *Şerban Aurel* (lic. Braşov), *Silistrarianu C.* (Ploeşti), *Spacu G. Petru* (Cluj), *Spârchez Zeno* (Şc. Polit. Timişoara), *Stern B. Arthur* (lic. Carol, Craiova), *Stoicescu T.* (Brăila), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Ţanovici V. C-tin* (lic. Ploeşti), *Ţigoiu Ioan* (Constanţa), *Ullea Titus* (lic. Internat, Iaşi), *Văcăreanu A. Em.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Vasilescu B.* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timişoara), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov), *Vulpanovici Boriş* (Chişinău) şi *Zamfirescu Alex.* (Piteşti).

452. — *Să se rezolve sistemul:*

$$\begin{cases} x^2[x^2+2(3y^2+2xy-4)]+y^2[y^2+2(xy-4)]= \\ \qquad 16(xy-1) \\ \dfrac{2y+6-x}{y}-\dfrac{y+6}{x}=\dfrac{9}{xy}. \end{cases}$$

VASILIEV ILIE

Dezvoltând calculele, putem scri:

$$\begin{cases} x^4+6x^2y^2+4x^2y-8x^2+y^4+4xy^3- \\ \qquad 8y^2-16xy+16=0 \\ 2xy+6x-x^2-y^2-6y-9=0, \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} (x+y)^4-8(x+y)^2+16=0 \\ (x-y)^2-6(x-y)+9=0. \end{cases}$$

Acest sistem se mai poate scri încă:

$$\begin{cases} (x+y)^2=4 \\ x-y=3. \end{cases}$$

De aci deducem:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=3 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} x+y=-2 \\ x-y=3. \end{cases}$$

De unde:

$$\begin{cases} x=\dfrac{5}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=-\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Avem deci dacă sisteme de soluţii, care satisfac sistemul de ecuaţii dat.

Soluţii date de d-nii: *Apostean I.* (lic. Timişoara), *Bădescu Aurelian* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Beldie N. D-tru*, *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Caftangioglu C. C-tin* (lic. R.-Sărat), *Cuffu Petre* (lic. R.-Sărat), *Caracaş I. Gh.* (lic. Botoşani), *Daraban N. Paul* (Şc. Polit. Timişoara), *Deonca Nicolae*, *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dravătz I.* (lic. Ploeşti), *Drogeanu N. Paul* (Semin. Pedag. Bucureşti), *Duport Gheorghe* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Florea V. Gheorghe* (lic. Craiova), *Frumuşelu H. Gheorghe* (lic. Braşov), *Ionescu Angelo* (Cluj), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Katz Lazăr* (lic. Botoşani), *Manolescu I. Niculae* (Focşani), *Matak D. Radu* (Semin. Pedag. Bucureşti), *Mihăilescu Şt. Niculae* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Mützel A.* (lic. Cernăuţi), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Neumann Maria* (Lugoj), *Nicolau C.* (lic R.-Sărat), *Nicolau I. Dobridor* (lic. milit. Craiova), *Nicolescu I. Emil* (Ploeşti), *Niculescu Şt. Emanuel* (lic. milit. Craiova), *Pâslaru I. Nicolae* (lic. R.-Sărat), *Petrescu M. Ioan Pop Iulian* (Cluj), *Podariu Al.* (lic. Piatra-Neamţ,. *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici Th. Ioan* (student), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Răpeanu N. Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Raiciu V. C-tin* (lic. Caracal), *Rusanda Gheorghe* (lic. Arad), *Sândulescu I. Ioan* (lic. milit. Craiova), *Scripcă Laur,* (Iaşi), *Simionov Kindin*, *Socaciu Nicolae* (Şc. Polit. Timişoara), *Spacu G. Petru* (Cluj), *Stănciulescu Dan* (lic. M-rea Dealu), *Stoicescu Th.* (lic. Brăila), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Tudose C. Tănase* (lic. Câmpina), *Ţanovici V. C-tin* (lic. Ploeşti), *Ţari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Ţigoiu Ioan* (Constanţa), *Ullea C. Titus* (lic. Internat, Iaşi), *Vasilescu Al.* (lic. Ploeşti), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov), *Winkel A. Alfred* (Semin. Pedag. Iaşi) şi *Zamfirescu Al.* (Piteşti).

454. — *În orice triunghiu există relaţia:*

$$\Sigma r_a(r_b-r_c)^2+8ps=4Rp^2$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

GEORGESCU JEAN

Pornim de la identitatea uşor de controlat:

$$(1) \qquad \Sigma\alpha(\beta-\gamma)^2+8\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha).$$

Înlocuind α, β, γ respectiv prin r_a, r_b, r_c, obţinem:

$$(2) \quad \Sigma r_a(r_b-r_c)^2+8r_ar_br_c=(r_a+r_b)(r_b+r_c)(r_c+r_a).$$

Dar din relaţiile cunoscute:

$$r_a=\frac{s}{p-a},\ r_b=\frac{s}{p-b},\ r_c=\frac{s}{p-c},\ abc=4Rs,$$

deducem:

$$(3) \quad 8r_ar_br_c=\frac{8s^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}=\frac{8s^3p}{s^2}=8ps.$$

(4) $$(r_a+r_b)(r_b+r_c)(r_c+r_a)=$$

$$\left(\frac{s}{p-a}+\frac{s}{p-b}\right)\left(\frac{s}{p-b}+\frac{s}{p-c}\right)\left(\frac{s}{p-c}+\frac{s}{p-a}\right)=$$

$$\frac{s^3[2p-(a+b)][2p-(b+c)][2p-(c+a)]}{(p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2}=$$

$$\frac{s^3.a.b.c.p^2}{s^4}=4Rp^2.$$

În virtutea relațiilor (3) și (4), relația (2) devine:

$$\Sigma r_a(r_b-r_c)^2+8ps=4Rp^2,$$

ceea ce era de dovedit.

Soluții date de d-nii: *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat) *Beşchea G. Nicolae* (lic. Braşov), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Cosma Z. Gheorghe* (București), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dravătz I.* (lic. Ploești), *Florea V. Gheorghe* (lic. Craiova), *Gataianțu V. Barbu* (lic. Caracal), *Grubenmann I. Grigore* (lic. Cantemir, București), *Ieremie Petru* (lic. Timișoara), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Manolescu I. Niculae* (lic. Focșani), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Nicolescu I. Emil* (Ploești), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pâslaru I. Nicolae* (lic. R.-Sărat), *Podeanu Al.* (Piatra-Neamț), *Pop Iulian* (Cluj), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici Aurel* (Focșani), *Popovici Th. Ioan* (student), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Rusanda Gheorghe* (lic. Arad), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Tunaru Traian* (Craiova), *Țanovici V. C-tin* (Ploești), *Vasilescu B.* (lic. Sf. Sava, București), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Timișoara), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov), *Vulpanovici Boriș* (lic. Chișinău) și *Winkler Alfred* (Semin. Pedag.).

PROBLEME PROPUSE

487.* — Să se dovedească că expresiunea:

$$128^{2n}\times 81^n-2500^n\times 17^{2n},$$

se divide cu 1001.

V. ALACI

488.* — Fie ABCD un trapez isoscel; E intersecția laturilor neparalele CB și DA; F simetricul lui A față de E; G întâlnirea cercului AFB cu DB; H și I întâlnirea dreptelor AB și DC cu FG. — Să se arate că patrulaterul AFCI este inscriptibil și că centrul K al cercului BHG se găsește pe AG.—Când A este fix, iar B se mișcă pe cercul cu centrul în punctul fix C și cu raza CB, se cere să se găsiască locurile punctelor D, F, G și K.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

489.* — Se dă un triedru tridreptunghiu și un punct. Prin punctul dat se duce un plan care taie triedrul după un triunghiu. Se cere locul geometric al ortocentrului acestui triunghiu, planul trecând necontenit prin punctul dat.

GH. CONSTANTINESCU

490. — Să se determine p și q astfel ca între rădăcinele ecuației:

$$x^2-px+q=0,$$

să avem relațiile:

$$\begin{cases} x'x''=\dfrac{(x'-x'')^2-(x'+1)}{2} \\ x'+x''=(1-x')(2-x'')+2(x'-x'')+2. \end{cases}$$

BADESCU AURELIAN

491. — Dânduse ecuațiile:

$$\begin{cases} x^2+nx+m+2=0 \\ x^2+px+m=0, \end{cases}$$

se cer valorile întregi ale coeficienților m, n, p, pentru care ele admit o rădăcină comună, precum și acea rădăcină.

N. TEODORESCU

492. — Să se găsească suma seriei:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{(n+4)(n+6)(n+8)(n+10)}.$$

V. COSNITA

493.* — În un trapez ABCD, împărțim una din laturile neparalele BC în trei părți egale prin punctele E, P. Ducem AE și DF care se taie în G. Să se arate că paralela dusă la baze prin G trece prin centrul de greutate al trapezului.

C. TEODORESCU

494. — Să se afle câți cai putere trebuesc pentru a aduce un punct material din 0 în A într'o secundă, știind că 0 exercită asupra punctului material o forță elastică atractivă, care devine de 100 kg. în momentul când punctul se găseste în A.

V. VALCOVICI

INFORMATIUNI

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare, problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată şi să iscălească.

Primim încă dela unii corespondenţi mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacţie se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e uşor de înţeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecinţă rugăm pe corespondenţii noştri să redacteze fiecare problemă separat, şi când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat şi prinse la problemă. Atragem în acelaşi timp atenţia harnicilor noştri corespondenţi să pue mai multă atenţie şi osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond şi formă.

Anunţăm că examenul de intrare la Şcoala Politechnică din Timişoara, are loc cu începere de 19 Octombrie 1925.

Abonamentul pe anul V-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

60 (ŞASEZECI LEI)

şi se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Directorul Şcoalei Superioare P. T. T.

Timişoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL V. 15 NOEMBRIE 1925 NO. 9.

BIBLIOT[illegible] „ASTRA"
SIBIU

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 6 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 60 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. I. AL. STOENESCU. ASUPRA UNOR SERII
2. NOTE MATEMATICE, 13, 14
3. CHESTIUNI DE EXAMEN
4. BIBLIOGRAFIE
5. PROBLEME REZOLVATE: 430, 439, 451, 455, 463
6. PROBLEME PROPUSE
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timişoara conţinând soluţiunile problemelor propuse şi probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Şcoala Politecnică, Piaţa Doja 12—Timişoara.

Plata abonamentului precum şi reclamaţiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Şcoalei Superioare P. T. T. Timişoara.

Colecţia R. M. T., se găseşte la Administraţia Revistei, şi se poate procura în schimbul preţului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broşat, 60 lei
Anul III, broşat, 60 lei
Anul IV, broşat, 60 lei.

ANUL V. — NO. 9. TIMISOARA, 15 NOEMBRIE 1925.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 6 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 60 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

ASUPRA UNOR SERII

I. AL. STOENESCU

——

Influenţat de articolul „Asupra câtorva însumări" de D-l *V. Alaci*, articol care mi-a servit ca punct de plecare, voi căuta să arăt mai jos un metod simplu pentru calcularea valorilor unor serii de o mare importanţă, serii care fac obiectul multor probleme şi note remarcabile atât din R. M. T. cât şi din G. M.

Pentru aceasta, să considerăm seria generală:

$$(1)\quad S = f(1)\alpha + f(2)\alpha^2 + f(3)\alpha^3 + \ldots + f(n)\alpha^n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\alpha^n$$

în care $f(n)$ este un polinom de gradul m în n, iar α un polinom oarecare în x.

Aplicând teorema raportului, condiţia de convergenţă a seriei date va fi:

$$(2)\qquad \lim \frac{f(n)}{f(n-1)} \cdot \alpha = \alpha < 1$$

$$p \cdot n = \infty.$$

Presupunem această condiţie îndeplinită. Putem scrie succesiv:

$$(1-\alpha)S = A_1 + \sum_{n=2}^{\infty} [f(n) - f(n-1)]\alpha^n$$

$$(1-\alpha)^2 S = A_2 = \sum_{n=3}^{\infty} [f(n) - 2f(n-1) + f(n-2)]\alpha^n$$

$$(1-\alpha)^3 S = A_3 + \sum_{n=4}^{\infty} [f(n) - 3f(n-1) + 3f(n-2) - f(n-3)]\alpha^n$$

. . . . . .

$$(3)\qquad (1-\alpha)^{m+1} S = A_{m+1} + \sum_{n=m+2}^{\infty} \left[f(n) - (m+1)f(n-1) + \frac{(m+1)m}{1.2} f(n-2) - \ldots \pm f(n-m-1) \right] \alpha^n$$

unde:

$$A_1 = f(1)\alpha, \quad A_2 = f(1)\alpha + [f(2) - 2f(1)]\alpha^2,$$

$$A_3 = f(1)\alpha + [f(2) - 3f(1)]\alpha^2 + [f(3) - 3f(2) + 3f(1)]\alpha^2,$$

. . . . . .

$$(4)\quad A_{m+1} = f(1)\alpha + [f(2) - (m+1)f(1)]\alpha^2 + \left[f(3) - (m+1)f(2) + \frac{(m+1)m}{1.2} f(1) \right] \alpha^3 + \ldots + \left[f(m+1) - (m+1)f(m) + \frac{(m+1)m}{1.2} f(m-1) - \ldots \mp (m+1)f(1) \right] \alpha^{m+1}$$

Să observăm cu atenţiune coeficienţii termenului general α^n din egalităţile de mai sus. Vom avea în mod evident:

$$(5)\quad \varphi_1(n) \equiv f(n) - f(n-1) \equiv f'(n-1) + \frac{1}{2!} f''(n-1) + \frac{1}{3!} f'''(n-1) + \ldots$$

(6) $\varphi_2(n) \equiv f(n) - 2f(n-1) + f(n-2) \equiv$

$\varphi_1(n) - \varphi_1(n-1) \equiv \varphi'_1(n-1) + \ldots$

(7) $\varphi_3(n) \equiv f(n) - 3f(n-1) +$

$3f(n-2) - f(n-3 \equiv \varphi_2(n) - \varphi_2(n-1)$

. . . . . .

(8) $\varphi_{m+1}(n) \equiv \varphi_m(n) - \varphi_m(n-1)$

$\varphi_{m+1}(n)$ fiind coeficientul termenului α^n din egalitatea (3) etc.

Insă, cum $f(n)$ este un polinom de gradul m, din egalitatea (5) rezultă imperios că $\varphi_1(n)$ este de gradul $(m-1)$ şi ca urmare imediată $\varphi_2(n)$ va fi de gradul $(m-2)$, iar $\varphi_3(n)$ de gradul $(m-3)$, după cum reiese imediat din egalitatea (6) şi (7).

Analog studiind chestiunea din aproape în aproape, se poate stabili că $\varphi_4(n)$, $\varphi_5(n)$, ..., $\varphi_m(n)$ sunt respectiv de gradele:

$$(m-4),\ (m-5). \ldots . 0.$$

Ca rezultat dedus din (8), avem dreptul de a a scrie:

$$\varphi_{m+1}(n) \equiv 0, \tag{9}$$

de oarece $\varphi_m(n)$, fiind de grad nul, se reduce la o constantă şi deci:

$$\varphi_m(n) = \varphi_m(n-1).$$

Ţinând seama de egalităţile (2) şi (9), egalitatea (3) ne dă:

$$(1-\alpha)^{m+1} S = A_{m+1} + \sum_{n=m+2}^{\infty} \varphi_{m+1}(n)\,\alpha^n = A_{m+1}$$

$$\overset{*}{**} \quad S = \frac{A_{m+1}}{(1-\alpha)^{m+1}}. \tag{10}$$

Această sumă aflată e complect determinată, pentrucă A_{m+1}, fiind suma a $(m+1)$ termeni $(m$, finit) după cum urmează din egalitatea (4), este finit şi complect determinat.

Câteva exerciţii vor putea arăta în destul care este domeniul aplicativ al celor arătate mai sus.

Fie de calculat sumele seriilor:

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= 1.2.3x + 2.3.4x^2 + 3.4.5x^3 + \ldots \\ &\ldots + n(n+1)(n+2)x^n + \ldots \\ S_2 &= x + 2^4x^2 + 3^4x^3 + \ldots + n^4x^n + \ldots \end{aligned}\right\} x < 1$$

Avem în cazul primei serii:

$$\alpha = x \quad m = 3 \quad f(n) = n(n+1)(n+2), \tag{11}$$

şi în cazul seriei a doua:

$$\alpha = x \quad m = 4 \quad f(n) = n^4. \tag{12}$$

Inlocuind în (4) şi (10) succesiv valorile din (11) şi (12) găsim:

$$A_4 = 1.2.3x + [2.3.4 - 4.1.2.3]x^2 +$$

$$[3.4.5 - 4.2.3.4 + 6.1.2.3]x^3 +$$

$$[4.5.6 - 4.3.4.5 + 6.2.3.4 - 4.1.2.3]x^4 = 6x$$

$$S_1 = \frac{6x}{(1-x)^4}$$

$$A_5 = x + (2^4 - 5)x^2 + [3^4 - 5.2^4 + 10]x^3$$

$$+ [4^4 - 5.3^4 + 10.2^4 - 10]x^4 + [5^4 - 5.4^4 + 10.3^4$$

$$- 10.2^4 + 5]x^5 = x + 11x^2 + 11x^3 + x^4$$

$$S_2 = \frac{x + 11x^2 + 11x^3 + x^4}{(1-x)^5}$$

Utilizând metoda derivatelor, metodă indicată de D-l *M. Ghermănescu* în R. M. T., an. I, pag. 93 şi apoi de D-l Locot. *I. Linteş* în R. M. T., an. II, pag. 137, obţinem acelaş rezultat.

Prin înlocuiri analoage, se poate căpăta suma principalei serii:

$$S_k = x + 2^k x^2 + 3^k x^3 + \ldots + n^k x^n + \ldots \qquad x < 1$$

sumă care a fost calculată de D-l *I. T. Rizescu*, pe altă cale, în cazul $x = \frac{1}{a}$, şi asupra căreia voi reveni cu un alt prilej, precum şi a altor multe serii de acest gen.

NOTE MATEMATICE

13. *Asupra problemei 170, R. M. T., No. 8, 1925.* *Dându-se ecuația* $x^3 + p\,x + q = 0$, *cu rădăcinele* $\cos x$, $\cos y$, $\cos z$, *se cere ecuația de gradul al 3-lea cu rădăcinele* $tg^2\frac{x}{2}$, $tg^2\frac{y}{2}$, $tg^2\frac{z}{2}$.

Iată o soluție mai simplă pentru această problemă. Notăm, $\cos x = x_1$, $\cos y = x_2$, $\cos z = x_3$ și fie X_1, X_2, X_3 rădăcinele ecuației cerute.

Cum știm că:

$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

putem ușor scri:

$$X_i = \frac{1-x_i}{1+x_i},\quad (i=1,\ 2,\ 3)$$

$$^{*}_{*}{}^{*}_{*}\quad x_i = \frac{1-X_i}{1+X_i}.$$

Înlocuind în ecuația dată $x = x_i$, avem:

$$\left(\frac{1-X_i}{1+X_i}\right)^3 + p\left(\frac{1-X_i}{1+X_i}\right) + q = 0$$

$$^{*}_{*}{}^{*}_{*}\quad (1-X_i)^3 + p(1-X_i)(1+X_i)^2 + q(1-X_i)^3 = 0,$$

sau:

$$(1+p-q)\,X_i^3 - (3-p+3q)X_i^2 +$$
$$+(3-p-3q)X_i - (1+p+q) = 0,$$

și cum $i = 1,\ 2,\ 3$, înseamnă că toate rădăcinele X_2, X_2, X_3 satisfac ecuația:

$$(1+p-q)\,X^3 - (3-p+3q)\,X^2 +$$
$$+(3-p-3q)X - (1+p+q) = 0,$$

care este tocmai ecuația cerută.

V. A.

14. *Asupra funcțiunilor omogene și pseudo-omogene.* Îmi propun ca în rândurile de mai jos să stabilesc prin o nouă metodă formulele lui *Euler* relativ la funcțiunile omogene, și formulele corespunzătoare pentru funcțiunile pseudo-omogene, date de D-l *V. Alaci* în R. M. T. an III, No. 1.

Să reamintesc că o funcțiune $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ se zice omogenă când avem identic:

(1) $$f(t\,x_1,\ t\,x_2, \ldots t\,x_n) = t^m f(x_1,\ x_2, \ldots x_n),$$

m fiind un număr algebric, zis gradul de omogeneitate, și t fiind arbitrar. — Funcțiunea $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ se zice pseudo-omogenă când avem identic:

(2) $$f(t^{\alpha_1}x_1,\ t^{\alpha_2}x_2, \ldots t^{\alpha_n}x_n) = t^m f(x_1,\ x_2, \ldots x_n),$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, m, fiind numere algebrice, și t fiind arbitrar.

1°. Pentru a stabili relațiile amintite, voi folosi formula *Taylor*:

$$f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots x_n+h_n) =$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots x_n) + \sum_{i=1}^{n} h_i\frac{\delta f}{\delta x_i} + \frac{1}{2!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^{(2)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{m!}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^{(m)} + \ldots$$

Ca să obțin formulele lui *Euler*, scriu în formula *Taylor*:

$$h_i = (t-1)\,x_i.\qquad (i = 1,2\ldots n).$$

Obțin:

$$f(t\,x_1,\ t\,x_2, \ldots t\,x_n) =$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots x_n) + (t-1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\delta f}{\delta x_i}\right) +$$
$$+\frac{(t-1)^2}{2!}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^{(2)} + \ldots + \frac{(t-1)^m}{m!}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^{(m)} + \ldots$$

Trecând pe $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ în primul membrul și ținând seama de (1), am:

(3) $$(t^m-1)\,f(x_1, x_2, \ldots x_n) =$$
$$(t-1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\delta f}{\delta x_i}\right) + \frac{(t-1)^2}{2!}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^{(2)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(t-1)^m}{m!}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^{(m)} + \ldots$$

Înmulțesc cu $\frac{1}{(t-1)}$, luăm apoi $t=1$ și observăm că:

$$\lim_{t=1}\frac{t^m-1}{t-1} = m.$$

Obțin prima relație a lui *Euler*:

(4) $$m\,f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\delta f}{\delta x_i}.$$

Scad pe:

$$(t-1)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\delta f}{\delta x_i}\right)$$

din ambii membri ai relației (3), țin seama de (4), împărțesc cu $(t-1)^2$ luăm apoi $t=1$ și observăm că:

$$\lim_{t=1} \frac{t^m - 1 - m(t-1)}{(t-1)^2} = \frac{m(m-1)}{2!}.$$

Obțin astfel a doua relație a lui *Euler*:

$$(5) \qquad m(m-1) f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^{(2)}.$$

Procedând în mod analog, se obțin toate relațiile lui *Euler*.

2°. Ca să obțin relațiile corespunzătoare relativ la funcțiunile pseudo-omogene, luăm în formula *Taylor*:

$$h_i = (t^{\alpha_i} - 1) x_i. \qquad (i = 1, 2, \ldots n).$$

Obțin:

$$f(t^{\alpha_1} x_1, t^{\alpha_1} x_2, \ldots t^{\alpha_n} x_n) = f(x_1, x_2, \ldots x_n) +$$

$$+\left(\sum_{i=1}^{n} (t^{\alpha_i} - 1) x_i \frac{\delta f}{\delta x_i}\right) + \frac{1}{2!}\left(\sum_{i=1}^{n} (t^{\alpha_i} - 1) x_i \frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^{(2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{m!}\left(\sum_{i=1}^{n} (t^{\alpha_i} - 1) x_i \frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^{(m)} + \ldots$$

sau, ținând seama de (2) și trecând pe $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ în primul membru, avem:

$$(6) \quad (t^m - 1) f(x_1, x_2, \ldots x_n) = (t-1)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{t^{\alpha_i} - 1}{t-1} x_i \frac{\delta f}{\delta x_i}\right) +$$

$$+ \frac{(t-1)^2}{2!}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{t^{\alpha_i} - 1}{t-1} x_i \frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^{(2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(t-1)^m}{m!}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{t^{\alpha_i} - 1}{t-1} x_i \frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^{(m)} + \ldots$$

Împărțind cu $(t-1)$, scriind în urmă: $t=1$ și observând că:

$$\lim_{t=1} \frac{t^{\alpha_i} - 1}{t-1} = \alpha_i,$$

obțin relația:

$$(7) \qquad m f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \frac{\delta f}{\delta x_i},$$

care scrie tocmai formula (6) din articolul D-lui *V. Alaci*.

Dacă scad din ambii membri ai relației (6) pe:

$$(t-1)\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \frac{\delta f}{\delta x_i}\right)$$

și țin seama de (7), obțin:

$$(8) \quad [t^m - 1 - m(t-1)] f(x_1, x_2, \ldots x_n) =$$

$$= (t-1)^2\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{t^{\alpha_i} - 1 - \alpha_i(t-1)}{(t-1)^2} x_i \frac{\delta f}{\delta x_i}\right) +$$

$$+ \frac{(t-1)^2}{2!}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{t^{\alpha_i} - 1}{t-1} x_i \frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^{(2)} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(t-1)^m}{m!}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{t^{\alpha_i} - 1}{t-1} x_i \frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^{(m)} + \ldots$$

Împărțind în (8) cu $(t-1)^2$ și observând că:

$$\lim_{t=1} \frac{t^{\alpha_i} - 1 - \alpha_i(t-1)}{(t-1)^2} = \frac{\alpha_i(\alpha_i - 1)}{2!},$$

obțin pentru $t=1$:

$$m(m-1) f(x_1, x_2, \ldots x_n) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\alpha_i - 1) x_i \frac{\delta f}{\delta x_i} + \sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_i x_i \frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^{(2)},$$

relații identică cu formula (9) din articolul d-lui *V. Alaci*. Prin același procedeu se obțin relații între funcțiunea pseudo-omogenă și derivatele sale de ordin superior.

Observare: Se poate stabili ușor relația:

$$(t^m - 1) = m(t-1) + \frac{m(m-1)}{2!}(t-1)^2 +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}(t-1)^3 + \ldots + \frac{m!}{m!}(t-1)^m.$$

Făcând această substituţie în (3) avem:

$$\left[m(t-1)+\frac{m(m-1)}{2!}(t-1)^2+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{m!}{m!}(t-1)^m\right]f(x_1, x_2, \ldots x_n)\equiv$$

$$\equiv(t-1)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)+\frac{(t-1)^2}{2!}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^{(2)}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{(t-1)^m}{m!}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{\delta f}{\delta x_i}\right)^{(m)}.$$

Egalând în această relaţie, care e o identitate, coeficienţii aceloraşi puteri ale lui (t—1), se obţin deadreptul toate relaţiile lui *Euler*, relativ la funcţiunile omogene.

REMUS B. POPA-RADULET

CHESTIUNI DE EXAMEN

ŞCOALA POLITECHNICĂ DIN TIMIŞOARA

Examenul de admitere în anul I

19 Octombrie 1925

Lucrare scrisă de Geometrie

Se dă un patrulater convex A B C D în care:

$AB=AD=a$; $\widehat{BAD}=60^0$; $\widehat{ABC}=90^0$; $\widehat{CDA'}=45^0$,

C D A′ fiind unghiul pe care-l face D C cu prelungirea D A′ a laturei A D.

Perpendiculara în A pe A B se întâlneşte în F cu perpendiculara în C pe B C. Paralela dusă din F la D C se întâlneşte cu A D în K iar paralela dir F la A D se întâlneşte cu C D în H.

Se cere:

1°. Să se demonstreze că $BC=a$.

2°. Să se calculeze suprafaţa S a patrulaterului A B C D în funcţie de a.

3°. Să se arate că exagonul A B C K F H este înscriptibil într-un cerc O.

4°. Să se arate că C H este egală cu latura triunghiului echilateral înscris în cercul O.

5°. Să se arate că raza cercului O este egală cu F K.

6°. Să se calculeze lungimile C D şi C H în funcţie de a.

7°. Să se calculeze suprafaţa S_1 a exagonului A B C K F H.

Algebră

19 Octombrie 1925

I.

Să se calculeze derivata funcţiunei:

$$y=\frac{2\sqrt{3}\sin x}{2+\cos x}-\text{arc}\,.\,\text{tg}\left(\frac{\sqrt{3}\sin x}{1+2\cos x}\right).$$

Să se studieze variaţiunea derivatei calculate şi să se construiască curba ei reprezentativă.

II.

Fie x_1, x_2, x_3, rădăcinile ecuaţiei:

$$x^3+x^2+px+q=0$$

Să se găsească ecuaţia de gradul al treilea, ale cărei rădăcini sunt:

$$X_1=1-\frac{1}{x_1^2},\ X_2=1-\frac{1}{x_2^2},\ X_3=1-\frac{1}{x_3^2}.$$

Să se rezolve ecuaţia dată şi cea găsită, în cazul particular $p=q=1$.

Trigonometrie

20 Octombrie 1925

I. În triunghiul oarecare A B C, AA_1, BB_1, CC_1, sunt înălţimile şi H punctul lor de intersecţie.

Ştiind că:

a. Triunghiurile BAB_1 şi ACA_1 sunt asemenea.

b. $\sin A+\sin B+\sin C=\sqrt{\frac{27}{4}}$.

c. Proecţia lui C_1H pe A H este $C_2H=12{,}50$ m., să se calculeze elementele triunghiului A B C.

II. Să se determine totalitatea arcelor x şi y care satisfac condiţiunilor

$$\frac{\text{tg}\,x-\text{tg}\,y}{\text{tg}\,x+\text{tg}\,y}=1$$

$$x-y=\frac{\pi}{6}$$

x_1, fiind arcul cel mai mic care satisface condiţiunilor, să se determine liniile trigonometrice ale arcului $\frac{x_1}{2}$ în funcţie de $\sin x_1$. Să se explice corespondenţa semnelor în formule şi să se calculeze valoarea numerică a liniilor $\sin\frac{x_1}{2}$, $\cos\frac{x_1}{2}$, $\text{tg}\,\frac{x_1}{2}$ cu aproximaţie de 1/5000.

III. Să se facă calculabilă prin logaritmi şi să se calculeze valoarea numerică a expresiunei

$$E=\sin\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\frac{5\pi}{12}$$

să se determine arcul x în radiani pentru care

$$\text{tg}\,x=E.$$

CHESTIUNI DE EXAMEN

Examenul de bacalaureat (sec ia reală) Arad, 1925

Sesiunea de vară

Algebră

Să se sumeze seria:

$$\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2x^2}{x^4-1}+\ldots+\frac{2x^{2^n-1}}{x^{2^n}-1}+\ldots$$

Geometrie

Ce linii reprezintă ecuațiile:

$$x^2+y^2=4$$

$$(x-5)^2+(y-4)^2=1.$$

Au aceste curbe puncte comune? Care sunt aceste puncte?

Sesiunea de toamnă

Algebră

Să se determine a și b astfel ca ecuația:

$$x^4-4ax^3+6bx^2-8x+1=0,$$

să aibă 2 rădăcini duble și în acest caz să se rezolve.

Geometrie

Fie M un punct variabil al unui cerc de diametru A B, cu centrul în O, astfel ca $OA=2a$.

1) Insemnând cu α și β coordonatele punctului M, să se scrie ecuațiile cercurilor circumscrise triunghiurilor M O A și M O B.

2) Să se arate că distanțele centrelor P și Q ale acestor cercuri la dreapta A B au un produs constant.

3) Să se afle locul geometric al punctului de intersecție a dreptelor A P și B Q.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXI, No. 2, Octombrie 1925. Sărbătorirea a 30 ani dela apariția „*Gazetei Matematice*". Asupra unei chestiuni de geometrie infinitizimală, de *N. Abramescu*.

2. *Foia Matematică*, anul II, vol. I, No. 10, Octombrie 1925. Asupra ecuațiilor algebrice cu toate rădăcinele reale (sfârșit), de *Petre Sergescu*.

3. *Curierul Matematic*, vol. I, No. 8. O clasă de polinoame ortogonale (urmare). de Prof. *M. Ghermânescu*.

4. *Monografie asupra ecuațiilor algebrice cu toate rădăcinele reale*, de *P. Sergescu*. Lucrare premiată de Universitatea din *București*, în 1916, cu premiul *Hillel*. Lucrarea este litografiată are format mare și conține 146 pagini.

Pentru a se vedea însemnătatea lucrărei, vom cita chestiunile ce cuprinde:

Partea I. Teoreme generale asupra ecuațiilor algebrice. Introducere. Teorema lui *Rolle*. Teorema lui *Laguerre*. Aplicații a teoremei lui *Laguerre*. Teorema lui *Descartes*. Aplicații ale teoremii lui *Laguerre*. Teoreme care dau exact numărul rădăcinilor. Teorema lui *Sturm*. Comparație între teorema lui *Laguerre* și *Sturm*. Criteriul lui *Laguerre*. Separarea rădăcinelor unei ecuații.

Partea II. Ecuații algebrice cu toate rădăcinele reale.

Capitolul I. Condiții ca o ecuație să aibă toate rădăcinele reale. Introducere. Contribuțiunile teoremei lui *Descartes*. Teoria lacunelor. Contribuțiunile teoremei lui *Rolle* și *Laguerre*. Generalizare. Aplicațiunile emanenților. Criteriile lui *Lagrange* și *Laguerre*. Contribuțiile teoremei lui *Sturm*.

Capitolul II. Proprietăți ale ecuațiilor cu toate rădăcinele reale. Ecuații care-și separă reciproc rădăcinele. Teorema lui *Hermite*. Considerarea punctelor derivate (*Laguerre*). Relațiuni între coeficienti. Aplicații ale teoremei lacunelor. Contribuții ale teoremii lui *Rolle*. Teorema lui *Schur* asupra rădăcinelor derivatelor.

Capitolul III. Transformările ecuațiilor cu toate rădăcinele reale. Contribuțiunile teoremelor generale. (Teorema lui *Hermite*.) Transformările lui *Laguerre*. Transformările lui *Schur* și *Malle*. Aplicații. Considerații generale asupra transformărilor: Siruri de factori (ai lui *Schur* și *Polya*). Criterii de existență pentru șirurile de factori.

Capitolul IV. Calcularea rădăcinelor unei ecuații cu toate rădăcinele reale. O metodă a lui *Laguerre*.

Partea III. Aplicații. Capitolul I. Formarea de ecuații cu toate rădăcinele reale. Generalități. Aplicații ale teoremei lui *Rolle*. Aplicații ale teoremei lui *Sturm*. Aplicații de considerații trigonometrice.

Capitolul II. Ecuația seculară. Realitatea rădăcinelor. Proprietăți ale ecuației seculare. Ecuații algebrice definite prin ecuații diferențiale.

Recomandăm călduros corespondenților noștri lucrarea interesantă și bine expusă, a D-lui Profesor Universitar *P. Sergescu*, și pentru a o obține a se adresa autorului Seminarul de Matematici, *Universitatea din Cluj*.

PROBLEME REZOLVATE

430. — *Să se găsească un număr de patru cifre prim, format din patru cifre consecutive.*

N. TEODORESCU

Soluție dată de d-nii: *Aposteanu Gh. Ioan* (lic. Timișoara), *Beldie N. D-tru* (R.-Sărat), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir), *Braiester O.* (lic. Național, Iași), *Gataiantu V.*

Barbu (lic. Caracal), *Goldenzveig Carol Leopold* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Grubenmann I. Grigore* (Bucureşti), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Katz Lazăr* (lic. Botoşani), *Kertesz I. Paul, Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Popovici Dan Puiu* (Chişinău), *Popovici Mihai* (lic. Internat, Iaşi), *Segal Leon, Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timişoara) şi *Vulpanovici Boriş* (lic. Chişinău).

Numărul fiind prim, ultima cifră nu poate fi de cât 1, 3, 7 sau 9.

Grupele din patru cifre consecutive, în care intră una din aceste cifre sunt: 0, 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4; 2, 3, 4, 5; 3, 4, 5, 6; 4, 5, 6, 7; 5, 6, 7, 8; 6, 7, 8, 9.

Din aceste grupe lăsăm la o parte pe acelea în care suma cifrelor este divizibilă prin 3, pentru că n'am putea forma numere prime.

Rămân deci grupele:

1, 2, 3, 4; 2, 3, 4, 5; 4, 5, 6, 7; 5, 6, 7, 8.

Păstrând ultima cifră, 1, 3, 7, 9, putem forma următoarele numere:

2341	1243	2453	4567	5687
2431	1423	2543	4657	5867
3421	2413	4523	5467	6587
3241	2143	4253	5647	6857
4231	4123	5243	6457	8567
4321	4213	5423	6547	8657

Dintre aceste numere lăsăm la o parte pe acelea în care suma dintre prima şi a 3ª cifră este egală cu suma dintre a 2ª şi 4ª cifră, pentru că aceste numere sunt divizibile cu 11.

Rămân deci numerile:

2341	1423	2543	4567	5867
3241	2413	4523	4657	6587
4231	2143	4253	5647	6857
4321	4123	5243	6547	8567

Dintre acestea numerile: 3241, 4123, 5243 şi 6587 sunt divizibile cu 7; 8567 se divide cu 13; 2413 se divide cu 19 şi 4321 se divide cu 29.

Ne mai rămân numerile: 2341, 4231, 1423 2143, 2543, 4523, 4253, 4567, 4657, 5647, 5867, 6587, 6857, care sunt numere prime ceia ce putem uşor controla cu o tablă de numere prime.

Avem deci 13 soluţii.

Au dat singura soluţie 4567, înţelegând că ordinea cifrelor trebue să fie consecutivă, d-nii: *Akerman Cazimir* (Bucureşti), *Alter Cogan L.* (lic. Chişinău), *Anastasescu P. Vasile* (lic. Botoşani), *Aposteanu Vasile* (lic. Timişoara), *Agarici Gr. D-tru* (lic. Militar, Iaşi), *Apostoliu C. Ioan* (lic. Şincai, Bucureşti), *Ardelea Radu* (lic. Craiova), *Avramescu T. Ioan* (lic. Caracal), *Bădescu Aurelian* (lic. Sf, Sava, Bucureşti), *Băncila Mircea* (lic. Braşov), *Beju Tr., Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Boian C. Romulus* (lic. Tg.-Mureş), *Boldur Gh. Simeon* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Boambău Ioan* (lic. Braşov), *Boghiu Iosif* (lic. Braşov), *Boroş P. Dan* (lic. Internat, Iaşi), *Boroş I. Vasile* (lic. Braşov), *Brustuc Gheorghe* (lic. Militar, Iaşi), *Carabeţeanu Gh.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Caracaş I. Gh.* (lic. Botoşani), *Caracostea Andreiu, Chirilă Ion* (lic. Internat, Iaşi), *Ciffer I. Simeon* (lic. Giurgiu), *Ciomofoiu Horea* (lic. Sibiu), *Chiru-Nanov O.* (lic. Internat, Iaşi), *Cocorandu Dan* (lic. Braşov), *Costea Octavian* (lic. Braşov), *Cristescu C. Ioan* (lic. Şincai, Bucureşti), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Dânga S.Vlad* lic. Orhei), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dimitriu D. Emil* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Dină M. Nicolae* (lic. Caracal), *Dinescu Florin* (lic. Ploeşti), *Dinu Gheorghe* (lic. M-rea Dealu), *Doboş W. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Dravătz I.* (lic. Ploeşti), *Drăgan G.* (lic. Braşov), *Dorgeanu N. Paul* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Dugan Castano Victor* (lic. M-rea Dealu), *Dumitrescu G. Haralamb* (lic. Giurgiu), *Feinstein Herman* (lic. Piatra-N.), *Feldştein M. Solomon* (lic. Piteşti), *Fezi E. Gh.* (ic. Orhei), *Florea V. Gheorghe* (lic. Craiova), *Foca I., Frankel I. Felix* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Frăsineanu Maria* (lic. Caracal), *Frumuselu H. Gheorghe* (lic. Braşov), *Gabrowsky Wylly* (lic. Braşov), *Gârleşteanu Mihail* (Şc. Polit., Timişoara), *Ghelber M.* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Gherbanovsky F. Nicolae* (lic. Orhei), *Grabovski Eugeniu* (lic. Orhei), *Gurita Gheorghe* (lic. Şincai, Bucureşti), *Halchias G.* (lic. Caracal). *Hulubei Telemac, Iacob St. Eug.* (Botoşani), *Iliescu St. Virgil* (lic. Tg.-Mureş), *Iliovici C-tin* (lic. Ploeşti), *Iliuţă Dăbuleni* (lic. Caracal), *Iliuţa I. Ioan* (lic. Caracal), *Ioachim Grigore* (lic. Militar, Iaşi), *Imre Macri Ştefan* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Ionescu M. I.* (Corabia), *Ionescu C. Nicolae* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Ionescu Gabriel Radu* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Istinie I. C. Brezuică* (lic. Caracal), *Istinie I. C-tin* (lic. Caracal), *Iscovici Paul* (lic. Piteşti), *Ivanovici A. Nicolae* (lic. Braşov), *Lăzărescu I. Ion* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Manole Gheorghe* (lic. Braşov), *Manolescu I. Nicolae* (lic. Focşani), *Marcopol Apostol* (lic. Braşov), *Marcovici M. Mauriciu* (lic. Botoşani), *Marineanu Traian* (lic. Timişoara), *Marinescu S. D.* (Ploeşti), *Marius Mariş, Matak D. Radu* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Micula Ovidiu* (lic. Arad), *Moldoveanu Marin* (lic. Tg.-Mureş), *Moroianu I. M.* (lic. Constanţa), *Moţoiu V.* (lic. Braşov), *Munteanu I. Gheorghe* (lic. Militar, Craiova), *Neacsu Vasile* (lic. Braşov), *Nicolau C. Ioan* (lic. Militar, Craiova), *Oana Ioan* (lic. Făgăraş), *Olariu T. Enea* (Şc. Polit., Timişoara), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Patron Nicolae* (lic. Militar, Iaşi), *Petrescu St. Alexandru Dan* (lic. Militar, Craiova), *Placa Mircea* (lic. Botoşani), *Podariu Alexandru* (lis. Piatra-N.), *Polaczek Franz* (lic. Câmpulung, Bucovina), *Pop Iulian* (Cluj), *Popa V. Adrian* (lic. Braşov), *Popa Iulian* (lic.

Făgăras), *Popa Petrescu Nicolae* (lic. Braşov), *Popescu I. Alex.* (lic. M-rea Dealu), *Popescu T. Alex.* (Giurgiu), *Popescu Stelian* (lic. Gh. Lazăr, Bucureşti), *Popovici Aurel* (Focşani), *Purdilă C-tin* (lic. Braşov), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Rădulescu Nicolae* (lic. Caracal), *Reşnoveanu Emil* (lic. Braşov), *Raian C-tin Preajba* (lic. Caracal), *Raiciu V. C-tin* (lic. Caracal), *Rătăn I.* (lic. Braşov), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Braşov), *Satcoeanu Gh.* (lic. Tg.-Mureş), *Săndulescu I. Ioan* (lic. Militar, Craiova), *Scripcă Valentin* (Giurgiu), *Şerban Aurel* (lic. Braşov), *Severin C. Marcel* (lic. Botoşani), *Sfinţescu T. Duiliu* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Silistrarianu C.* (Ploeşti), *Stănciulescu Dan* (lic. M-rea Dealu), *Stănescu I. A.* (lic. M-rea Dealu), *Stănescu D. Teodoriu* (lic. M-rea Dealu), *Stoicescu T., Socaciu Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Surumgiu V.* (lic. M-rea Dealu), *Ţanovici V. C-tin* (lic. Ploeşti), *Ţari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Ungureanu D. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vasiliev Ilie* (lic. Tulcea), *Velea Gr. Mihail* (lic. Militar, Craiova), *Voinescu D. I.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Piteşti), *Vulpanovici Boriş* (Chişinău) şi *Wetter Anna* (lic. Câmpulung, Bucovina).

439. — *Să se găsească un patrat perfect de patru cifre, astfel ca prima cifră să fie egală cu suma ultimelor două; a doua cifră să fie egală cu a treia; iar numărul format de ultimele două cifre să fie patrat perfect.*

ION I. ILIUTA

Fie $abcd$ numărul cerut. cd fiind patrat perfect poate fi:

01, 04, 09, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Cum $a = b + c \leq 9$, urmează că cd nu poate fi decât:

01, 04, 09, 16, 25, 36, 81

şi fiindcă şi: $b = c$ numărul căutat se găseşte printre numerile:

1001, 4004, 9009, 7116, 7225, 9336, 9881.

Numerile 1001, 4004, 9009, 7116 fiind divizibile prin 11 fără a fi prin 11^2, nu pot fi patrate perfecte.

9336 fiind divizibile cu 3 fără a fi prin 3^2, nu-i patrat perfect, Rămân numerile 7225 şi 9881, dintre care numai 7225 e patrat perfect.

Avem deci singura soluţie, $7225 = 85^2$.

Soluţii date de d-nii: *Agarici Gr. D-tru* (lic. Militar, Iaşi), *Akermann Cazimir* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Anastasiu P. Vasile* (lic. Botoşani), *Apostean Ioan* (lic. Timişoara), *Apostoliu C. Ioan* (lic. Şincai, Bucureşti), *Ardelea Radu* (lic. Militar, Craiova), *Avramescu T. Ioan* (lic. Caracal), *Bădescu Aurelian* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Borş Petre* (lic. Orăstie), *Beldie N. D-tru* (R.-Sărat), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Bivolaru C. Nicolae* (lic. Tg.-Mureş), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Boghiu Iosif* (lic. Braşov), *Boroş P. Dan* (lic. Internat, Iaşi), *Braieşter O.* (lic. Naţional, Iaşi), *Caftangioglu C. C-tin* (lic. R.-Sărat), *Caracaş I. Gh.* (lic. Botoşani), *Chirilă Ion* (lic. Internat, Iaşi), *Chiru Nanov O.* (lic. Internat, Iaşi), *Ciffer I. Simon* (lic. Giurgiu), *Cojoc M.* (Piatra-Neamţ), *Constantinescu D. D.* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Constantinescu Marius* (lic. Slatina), *Cristescu C. Ioan* (lic. Şincai, Bucureşti), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Dânga S. Vlad* (lic. Orhei), *Daraban N. Paul* (Şc. Polit., Timişoara), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Dăscălescu Hristachc* (lic. Focşani), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dină M. Nicolae* (lic. Caracal), *Dimitrescu A. Mişu* (lic. Roman), *Dimitriu D. Emil* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Dravătz Ioan* (lic. Ploeşti), *Drăgan G.* (lic. Braşov), *Drogeanu N. Paul* (Semin. Pedag., Bucureşti), *Duport George* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Feinstein Herman* (lic. Piatra-N.), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Foca I. P., Frăsineamu Maria* (lic. Caracal), *Frumuşelu H. Gheorghe* (lic. Braşov), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gărlesteanu Mihail* (Şc. Polit., Timişoara), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Piteşti), *Gherbanovschi Nicolae* (lic. Orhei), *Goldenzweig S. C. Leopold* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Grubenmann I. Grigore* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Guriţă Gheorghe* (lic. Şincai, Bucureşti), *Halchias G.* (lic. Caracal), *Hulubei Telemac* (lic. Internat, Iaşi), *Iacob Sf. Eug.* (Botoşani), *Iliescu Şt. Virgil* (lic. Tg.-Mureş), *Iliovici C-tin* (lic. Ploeşti), *Iliuţă Dăbuleni* (Romanaţi), *Imre Macri Ştefan* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Ioachim Grigore* (lic. Militar, Iaşi), *Ionescu Th. Andrei-Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti) *Ionescu Angelo* (Cluj), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Iuliu, Ioanovici N. Adrian* (lic. Siret, Bucovina), *Iscovici Paul* (Piteşti), *Istinie I. C. Brezuica* (lic. Caracal), *Ioanovici A. Nicolae* (lic. Braşov), *Katz Lazăr* (lic. Botoşani), *Kertesz I. Paul, Lăzărescu I. Ion* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Lepădatu Miclea* (lic. Cahul), *Lepădatu I. Victor* (Iaşi), *Manolescu I. Nicolae* (lic. Focşani), *Marineanu Traian* (lic. Timişoara), *Marinescu S. D.* (Ploeşti), *Marcopol A. Apostol* (Corabia), *Marius Mariş* (lic. Arad), *Mihăilescu Şt. Niculae* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Micula Ovidiu* (lic. Arad), *Moroianu I. At.* (lic. Constanţa), *Moţoiu V. V.* (lic. Braşov), *Munteanu I. Gheorghe* (lic. Militar, Craiova), *Mutzel A.* (lic. Cernăuţi), *Neacşu Vasile* (lic. Braşov), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Neumann Maria* (Lugoj), *Nicolau I. C.* (C. de Arges), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Nicolau C. Ioan* (lic. Militar, Craiova), *Niculescu Emanuel* (lic. Militar, Craiova), *Noica Ion* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Panţu Z. Ion, Paraschivescu Bosnief* (Bucureşti), *Patron Nicolae* (lic. Militar, Iaşi), *Pavelescu Th. Mircea* (lic. Tg.-Jiu), *Păun I. C-tin* (lic. Focşani), *Pârvu A.* (lic. Lăzar, Bucureşti), *Pâslaru I. N.* (lic. R.-Sărat), *Petrescu Şt. Alex. Dan* (lic. Militar, Craiova), *Placa Mircea* (lic. Botoşani), *Podoriu Al.* (Piatra-N.), *Popescu T. Alexandru* (lic. Giurgiu), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Popescu Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popovici Aurel* (Focşani), *Popovici I. Puiu Dan* (Chişinău), *Potărniaka Octav, Predescu I. Niculae* (lic. Caracal) *Purdilă C-tin* (lic. Braşov), *Puscă I. Toma* (lic. Internat, Iaşi), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Raiciu V. C-tin* (lic. Caracal), *Rapaport N. Avram* (Botoşani), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Rusanda Gheorghe* (lic. Arad), *Rusmănică Ioan* (lic. Braşov), *Săndulescu I. Ioan* (lic. Militar, Craiova), *Schächter M. Oziaş, Schor A. Oscar* (Sem. Pedag., Bucureşti), *Scripcă Laur.* (Iaşi), *Scripcă Valentin* (Giurgiu), *Şerban Aurel* (lic. Braşov), *Severin C. Marcel* (lic. Botoşani), *Sfinţescu T. Duiliu* (lic. Lazăr, Bucureşti)

Silistrarianu C. (Ploești), *Socaciu N.* (Șc. Polit., Timișoara), *Spârchez Zeno* (Șc. Polit., Timișoara), *Stăncescu A.* (lic. Ploești), *Stănciulescu Dan* (lic. M-rea Dealu), *Steriopol Ștefan* (lic. Caracal), *Stern B. Artur* (lic. Craiova), *Stoica Aureliu* (București), *Stoicescu T., Surugiu Vasile* (lic. M-rea Dealu), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu C. C.* (lic. Tg.-Mureș), *Tudose C. Tănase* (lic. Câmpina), *Țanovici V. C-tin* (Ploești), *Țari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, București), *Ullea C. Titus* (lic. Internat, Iași), *Ungureanu D. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Vasilescu B.* (lic. Sf. Sava, București), *Vasiliev Ilie* (lic. Tulcea), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timișoara) *Vlădea Ioan* (lic. Brașov), *Voinescu D. Ioan* (lic. Cantemir, București), *Vulponovici Boriș* (Chișinău) și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Pitești).

451. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\begin{vmatrix} \alpha & b_1 & c_1 \\ \beta & b_2 & c_2 \\ \gamma & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & \alpha \\ a_2 & \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & \alpha & c_1 \\ a_2 & \beta & c_2 \\ a_3 & \gamma & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & \alpha \\ b_2 & \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha \\ a_2 & b_2 & \beta \\ a_3 & b_3 & \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_1 & \alpha \\ c_2 & \beta \end{vmatrix} = 0.$$

V. ALACI

Soluție dată de d-nii: *Anastasiu Vasile* (lic. Botoșani), *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Ionescu Angelo* (Șc. Polit., Timișoara), *Kestesz I. Paul, Pop Iulian* (Șc. Polit., Timișoara), *Popovici Aurel* (Focșani) și *Spacu Gh. Petru* (Șc. Polit., Timișoara).

Însemnând cu A primul membru al identității, observăm că putem scri:

$$A = \begin{vmatrix} a_1\beta - a_2\alpha & 0 & b_1\beta - b_2\alpha & c_1\beta - c_2\alpha \\ a_1 & \alpha & b_1 & c_1 \\ a_2 & \beta & b_2 & c_2 \\ a_3 & \gamma & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

fiindcă, dacă dezvoltăm acest determinant după elementele primii linii, obținem primul membru al identității.

Mai putem scri:

$$A = \begin{vmatrix} a_1\beta & 0 & b_1\beta & c_1\beta \\ a_1 & \alpha & b_1 & c_1 \\ a_2 & \beta & b_2 & c_2 \\ a_3 & \gamma & b_3 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_2\alpha & 0 & b_2\alpha & c_2 a \\ a_1 & \alpha & b_1 & c_1 \\ a_2 & \beta & b_2 & c_2 \\ a_3 & \gamma & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Cum ambii determinanți sunt nuli ca având câte două linii proporționale, rezultă că.

$$A = 0,$$

și deci identitatea este astfel stabilită.

Soluția 2-a. Putem folosi următoarea teoremă, demonstrată în R. M. T., an. V, No. 3, pag. 37. *Dacă într'un determinant oarecare înlocuim elementele unei coloane prin niște numere arbitrare, apoi înmulțim determinantul astfel format cu determinantul de ordinul al 2-lea format cu două din elementele scoase, cari fac parte din două linii anumite, și cu elementele arbitrare respective prin care s'au înlocuit și facem această operație pentru fiecare coloană, atunci suma produselor obținute astfel este nulă.*

Dacă aplicăm această teoremă determinantului:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

și luăm ca elemente arbitrare α, β, γ, putem scri tocmai identitatea dată.

Soluții analoage date de d-nii: *Băncilă Mircea* (lic. Brașov), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Drăgan G.* (lic. Brașov), *Faibovici I. Henri* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Frumușelu A. Gheorghe* (lic. Brașov), *Gataianțu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gradin I. Gheorghe* (Șc. Polit. Timișoara), *Ioachim Grigorie* (lic. Militar, Iași), *Iscovici Paul* (lic. Pitești), *Lepădatu I. Victor* (Iași), *Manolescu I. Niculae* (lic. Focșani), *Marinescu S. D.* (Ploești), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Podariu Alex.* (lic. Piatra-Neamț), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popovici Th. Ioan, Pușcă I. Ioma* (lic. Internat, Iași), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Răpeanu N. Virgil* (lic. Internat, Iași), *Rusanda Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Scripcă Laur.* (Iași), *Segal Leon* (lic. Botoșani), *Uelea Tittus* (lic. Internat, Iași), *Vasiliev Ilie* (lic. Tulcea), *Wallechner Emil* (Govora) și *Winkler Alfred* (Semin. Pedag., Iași).

Au soluționat problema, dezvoltând toate calcule, d-nii: *Aposteanu Ion* (lic. Timișoara), *Ardelea Radu* (lic. Craiova), *Beșchea Nicolae* (lic. Brașov), *Boghiu Iosif* (lic. Brașov), *Caracaș I.* (lic. Botoșani), *Curcubată Dionisie* (lic. Brașov), *Dânga S. Vlad* (Orhei), *Deonca Nicolae, Duport George* (lic. Sf Sava, București), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Foca Ilie* (Cluj), *Gherbanovschi F. Nicolae*

(Şc. Polit., Ttmişoara), *Gradin I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Grubenmann I. Grigore* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Iacob Şt. Eug.* (Botoşani), *Ianculescu Octavian* (Conductor de Mine), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Isăcescu C. C-tin* (lic. Tg.-Jiu), *Marineanu Traian* (lic. Timişoara), *Marius Mariş* (lic. Arad), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Novacu A. Valeriu* (lic. Arad), *Podariu Alex.* (lic. Piatra-Neamţ), *Rusanda Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Şerban Aurel* (lic. Braşov), *Severin C. Marcel* (lic. Botoşanu), *Simionov Kindin*, *Socaciu Nicolae* (Şc. Polit., Timişoara), *Spârchez Zeno* (Şc. Polit., Timişoara), *Stănciulescu Dan* (lic. M-rea, Dealu), *Taraş Vasile* (lic. Braşov), *Ţanovici V. C-tin* (lic. Ploeşti), *Vasiliev Ilie* (lic. Tulcea), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Timisoara), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov), şi *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti).

Soluţia 3-a dată de d-nii: *Foca Ilie* (Cluj) şi *Vasilescu B.* (lic. Sf. Sava, Bucureşti).

Dezvoltând determinanţii de ordinul al 3-lea după ultima linie şi însemnând prin A, B, C termenii membrului întâi al identităţii, putem scri:

$$A=\gamma\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1 & \alpha\\ a_2 & \beta\end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix}\alpha & c_1\\ \beta & c_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1 & \alpha\\ a_2 & \beta\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}\alpha & b_1\\ \beta & b_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1 & \alpha\\ a_2 & \beta\end{vmatrix}$$

$$B=a_3\begin{vmatrix}\alpha & c_1\\ \beta & c_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_1 & \alpha\\ b_2 & \beta\end{vmatrix}-\gamma\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_1 & \alpha\\ b_2 & \beta\end{vmatrix}-c_3\begin{vmatrix}a_1 & \alpha\\ a_2 & \beta\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha & b_1\\ \beta & b_2\end{vmatrix}$$

$$C=-a_3\begin{vmatrix}b_1 & \alpha\\ b_2 & \beta\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha & c_1\\ \beta & c_2\end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix}a_1 & \alpha\\ a_2 & \beta\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha & c_1\\ \beta & c_2\end{vmatrix}+\gamma\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}c_1 & \alpha\\ c_2 & \beta\end{vmatrix}$$

Adunând şi simplificând, avem:

$$A+B+C=\gamma\left[\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1 & \alpha\\ a_2 & \beta\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_1 & \alpha\\ b_2 & \beta\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}c_1 & \alpha\\ c_2 & \beta\end{vmatrix}\right]$$

$$=\gamma\,(a_1 b_1 c_2\beta-a_1 b_2 c_1\beta-a_2 b_1 c_2\alpha+a_2 b_2 c_1\alpha-$$

$$-a_1 b_1 c_2\beta+a_2 b_1 c_1\beta+a_1 b_2 c_2\alpha-a_2 b_2 c_1\alpha+$$

$$a_1 b_2 c_1\beta-a_2 b_1 c_1\beta-a, b_2 c_2\alpha+a_2 b_1 c_2\alpha=$$

$$=0,$$

deci identitatea este stabilită.

455. — *Cum trebuie să fie a, astfel ca numărul format punând la sfârsitul lui a îndoitul lui, iar la sfârsitul acestuia punând iarăşi pe a, să fie patrat perfect?*

GH. CONSTANTINESCU

Soluţii date de d-nii: *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Iliuţă Dăbuleni* (lic. Caracal), *Ionescu B. Alexandru* (lic. Piteşti), *Marinescu S. D.* (Ploeşti), *Nicolescu I. Emil* (lic. Ploeşti), *Purdilă C-tin* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Vulpanovici Boriş* (lic. Chişinău) şi *Zamfirescu Ioan* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova).

Fie n numărul cifrelor lui a. Avem de cercetat două cazuri.

Cazul I. a este astfel că şi 2 a are tot n cifre.

În acest caz, numărul din enunţ $a\,2\,a\,a$ se poate scri:

$$(1)\qquad 10^{2n}a+10^n\cdot 2a+a=$$

$$=a\,(10^{2n}+2\cdot 10^n+1)=a\,(10^n+1)^2.$$

Pentru ca numărul cerut să fie patrat perfect vedem din (1) că e deajuns ca a să fie patrat perfect.

Deci a trebuie să fie un patrat perfect de n cifre $<5\times 10^{n-1}$.

Astfel dacă $n=1$, atunci a este 1 sau 4; dacă $n=2$, atunci a este 16, 25, 36, 49; şi aşa mai departe.

Cazul II. a este astfel că 2 a are n+1 cifre.

În acest caz, numărul din enunţ $a\,2\,a\,a$ se poate scri:

$$10^{n+1}a+2a\times 10^n+a=a\,(10^{n+1}+2\cdot 10^n+1).$$

Această relaţie ne spune, că a trebuie să fie produsul factorilor primi ai numărului:

$$10^{n+1}+2\cdot 10^n+1,$$

care sunt ridicaţi la puteri impare şi astfel ca acest produs să aibă n cifre.

Dacă $n=1$, atunci:

$$10^{n+1}+2\cdot 10^n+1=1021,$$

număr prim, deci ar trebui ca $a = 1021$, dar nu avem $n = 1$ cifre, deci n'avem soluție. Tot astfel trebuie cercetat pentru un n oarecare.

Soluții parțiale date de d-nii: *Ardelea Radu* (lic. milit., Craiova), *Avramescu T. Ion* (lic., Caracal), *Bădescu Aurelian* (lic. Sf. Sava, București), *Brezeanu Paraschiv* (lic. Tg.-Mureș), *Carabețeanu Gh. Petre* (lic. Lazăr, București), *Caracaș I. Gh.* (lic., Botoșani), *Călin M. Gh.* (lic., Caracal), *Cercel C-tin* (lic. Tg.-Mureș), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focșani), *Drăgan Gh.* (lic. Brașov), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Gataianțu V. Barbu* (lic., Caracal), *Gavrilescu N. I.* (lic. Ploești), *Goldenzweig S. Carol L.* (lic. Mihai Viteazul, București), *Hart Lazăr* (lic. Galați), *Ianovici Andrian* (lic. Siret, Bucovina), *Kertész I. Paul, Manolescu I. Nicolae* (lic. Focșani), *Moroianu I. Al.* (lic., Constanța), *Motculescu Al. Ștefan* (lic. Sf. Sava, Bucuresti), *Neacsu Vasile* (Bacifălău), *Nicolau Dobridor I.* (lic. milit., Craiova), *Niculescu Șt. Emanuel* (lic. milit., Craiova), *Pantu Z. I.* (lic. Lazăr, București), *Petrescu Șt. Alexandru Dan* (lic. milit., Craiova), *Podariu Al.* (lic. Piatru-Neamț), *Popescu Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popescu Virgiliu* (lic.. Tg-Mureș), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Raiciu V. C-tin* (lic. Caracal), *Segal Leon* (lic. Botoșani), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Țanovici V. C-tin* (lic. Ploești), *Vasiliu D. George* (lic. Tg.-Mureș), și *Voinescu D. I.* (lic. Cantemir, București).

D-l *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, București), a dat și o generalizare acestei probleme.

463. — *Să se arate că expresia:*

$$E = 6^{2n+1} + 5^{n+2},$$

se divide cu 31.

MIHAI VASILIU

Putem scri succesiv:

$$E = 36^n \cdot 6 + 5^n \cdot 25 = (31 + 5)^n 6 + 5^n \cdot 25 =$$

$$= \text{mult } 31 + 5^n (6 + 25) = \text{mult } 31,$$

sau:

$$E = 36^n \cdot 6 + 5^n \cdot 25 = (31 + 5)^n \cdot 6 + 5^n (31 - 6) =$$

$$= \text{mult } 31 + 6 \cdot 5^n + \text{mult } 31 - 6 \cdot 5^n = \text{mult } 31.$$

Așa dar expresia dată este divizibilă cu 31.

Soluții date de d-nii: *Anastasiu P. Vasile* (lic. Botoșani), *Beldie N. D-tru* (lic. R-Sărat), *Beșchea G. Nicolae* (lic. Brașov), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dumitrescu Gh. Ioan* (lic. Caracal), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Florescu O. Octavian* (lic. Caracal), *Frumușelu H. Gheorghe* (lic. Brașov), *Iacob, Sf. Eug.* (Botoșani), *Ionescu B. Alexandru* (lic. Pitești), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Iuliu* (lic. Giurgiu), *Istinie I. C. Brezuica* (lic. Caracal), *Katz Lazar* (lic. Botoșani), *Lupu Avram* (lic. Internat, Iași), *Manolescu I. Niculae* (lic. Focșani), *Marineanu Traian* (lic. Timișoara), *Marius Mariș* (lic. Arad), *Mihăilescu Șt. Niculae* (lic. Matei Basarab, București), *Maroianu I. Al.* (lic. Constanța), *Nicolescu I. Emil* (Ploești), *Novocu A. Valeriu* (lic. Arad), *Podariu Al.* (lic. Piatra-Neamț), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Popovici Aurel* (Focșani), *Popovici Th. Ioan Rădulescu C. Mihail* (lic. R-Sărat), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Schächter M. Ozias, Segal Leon* (Botoșani), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Stoicescu T.* (Brăila), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Horet, București), *Tunaru Tr.* (Craiova), *Țanovici V. C-tin* (lic. Ploești), *Vasilescu B.* (lic. Sf. Sava), Bucuresti), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov), *Vulpanovici Boriș* (lic. Chișinău), *Winkler A. Alfred* (Semin. Ped., Iași) și *Zamfirescu Gh. Ion* (lic. Pitești).

Generalizare. D-nii *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași) și *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, București), observă că problema propusă este un caz particular a problemei mai generale: „*Să se demonstreze că expresia:*

$$(x + 1)^{2n+1} + x^{n+2},$$

este divizibilă prin:

$$x^2 + x + 1,$$"

problemă care este propusă și rezolvată în cartea „*Calculul Algebric*" a d-lui profesor *Traian Lalescu*, pag. 33, No. 7.

Pentru $x = 5$, avem problemă propusă.

PROBLEME PROPUSE

495. — Un număr de trei cifre înmulțit cu numărul format de primele lui două cifre și scăzând răsturnatul său deasemenea înmulțit cu numărul format de primele lui două cifre, dă un număr de patru cifre, la care inversând ordinea primelor două, căpătăm un patrat perfect. Care e acel număr?

IOAN TH. POPOVICI

496.* — Să se găsească un patrat perfect de șase cifre, astfel ca numărul format de ultimele trei cifre să fie complimentul aritmetic al numărului format de primele trei cifre.

GH CONSTANTINESCU

497.* — Fie triunghiul ABC și cercul descris pe AC ca diametru, care taie laturile AB și BC în M și N. Tangentele în M și N la cerc se întâlnesc pe înălțimea BB'.

A. NICOLAU

498.* — Să se demonstreze că:

$$(x+y-z)^5+(y+z-x)^5+(z+x-y)^5-(x+y+z)^5$$

se divide prin, $x^2+y^2+z^2$.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

499. — Să se pună sub forma unui produs de trei factori, suma:

$$bcm^2(bp-cn)+can^2(cm-ap)+abp^2(an-bm),$$

și să se deducă apoi că determinantul:

$$\begin{vmatrix} b^2p-c^2n & abp & -acn \\ -bap & c^2m-a^2p & bcm \\ can & -cbm & a^2n-b^2m \end{vmatrix},$$

este nul.

N. G. BOTEA

500.* — Să se facă calculabilă prin logaritmi, expresiunea:

$$E=\sin(2a-b)+\sin(2b-c)+$$
$$+\sin(2c-a)-\sin(a+b+c).$$

I. PROTOPOPESCU

501.* — Să se stabilească identitatea:

$$3\sum_{i=0}^{2k}\sin(2i+1)t-\sum_{i=0}^{2k}\sin(4k+2i+3)t$$
$$=4\frac{\sin^4(k+1)t}{\sin t}.$$

V. ALACI

502. — Fie O cercul circumscris triunghiului ABC și t_a, t_b, t_c porțiunile de tangente în punctele de intersecție ale razelor perpendiculare pe laturi, cu cercul, cuprinse între prelungirile razelor ce trec prin extremitățile laturilor, a, b, c.

Să se demonstreze relațiile:

$$1^0.\ \sum\frac{1}{t_a}\cdot\frac{1}{t_b}=\frac{1}{4R^2}.$$

$$2^0.\ \frac{1}{t_a}+\frac{1}{t_b}+\frac{1}{t_c}=4R^2\left(\frac{1}{t_a\,t_b\,t_c}+\frac{1}{abc}\right).$$

Să se calculeze în funcție de elementele triunghiului ABC, ari a exagonului format prin unirea extremităților segmentelor de tangente.

CONSTANTIN TH. IONESCU BUJOR

503.* — Un vagon de marfă are distanța între osii $l=4{,}50$ m., greutatea lui este $G=18$ tone, iar centrul de greutate îl admitem la o înălțime $h=1{,}45$ m., deasupra sinei. Dacă frânăm brusc vagonul, să se afle reacțiunile în dreptul roților. (Coeficientul de frecare $f=0{,}15$.)

C. TEODORESCU

INFORMATIUNI

Anunţăm că nu vom mai lua în considerare, problemele rezolvate, iscălite de mai mulţi corespondenţi. Fiecare corespondent trebue să-şi redacteze problema rezolvată şi să iscălească.

Primim încă dela unii corespondenţi mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacţie se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e uşor de înţeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecinţă rugăm pe corespondenţii noştri să redacteze fiecare problemă separat, şi când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat şi prinse la problemă. Atragem în acelaşi timp atenţia harnicilor noştri corespondenţi să pue mai multă atenţie şi osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond şi formă.

In ziua de 19 Octombrie, s'a început examenul de admitere în şcoala politechnică din Timişoara. S'au prezentat 150 candidaţi şi au fost admişi 67. Dintre abonaţii şi corespondenţii Revistei Matematice din Timişoara au reuşit următorii.

Pop Iulian	reuşit al	2-lea
Spacu Petre	„	3 „
Orbonaş Iuliu	„	4 „
Răuţ Const.	„	5 „
Ţanovici V.	„	6 „
Ern Serghei	„	7 „
Ionescu Angelo	„	8 „
Marienuţ Uroş	„	9 „
Stoica D-tru	„	10 „
Dabija Ion	„	14 „
Grigore Virgil	„	15 „
Deoanca N.	„	16 „
Nicolescu Em.	„	21 „
Vior D-tru	„	26 „
Tănăsescu V.	„	28 „
Cociubinschi V.	„	32 „
Gherbanovschi N.	„	36 „
Vutcărău A.	„	39 „
Grofşorean Gh.	„	40 „
Moldovan Gaston	„	50 „
Rusanda Gh.	„	53 „
Fezi Gh.	„	59 „
Giurgiu V.	„	60 „
Irhaşiu V.	„	61 „
Socaci Nic.	„	64 „

Un total de 25 candidaţi au reuşit deci, şi ne place să credem că exerciţiul şi atmosfera creiată de revista noastră este un factor destul de important în acest succes. Primele locuri sunt ocupate numai de corespondenţii noştri iar procentul general este de 37%.

Abonamentul pe anul V-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

60 (ŞASEZECI LEI)

şi se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Directorul Şcoalei Superioare P. T. T.

Timişoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL V. 15 DECEMBRIE 1925 NO. 10

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 6 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 60 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. I. CRACIUNESCU. O PROPRIETATE A CERCULUI SI A SFEREI
2. NOTE MATEMATICE, 15
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 276, 325, 422, 467, 471, 480, 486
5. PROBLEME PROPUSE
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Avem plăcerea a anunța că începând din luna Decembre, fac parte din comitetul Revistei Matematice din Timișoara și D-nii:

Adam D. Romeo, sublocot. de geniu, str. Lupească No. 49. București.

Crăciunescu I., profesor. str. Unirii 65, Brăila.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat, 60 lei
Anul III, broșat, 60 lei
Anul IV, broșat, 60 lei.

ANUL V. — NO. 10 TIMISOARA, 15 DECEMBRIE 1925.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 6 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 60 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

O PROPRIETATE A CERCULUI ȘI A SFEREI

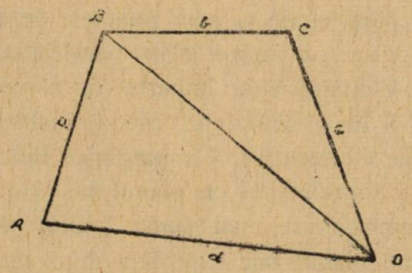
I. CRACIUNESCU
profesor, lic. din Brăila.

Cercul este linia cea mai scurtă, care închide suprafața maximă.

Sfera este suprafața cea mai mică, care închide volumul maxim.

1°. Inainte de a demonstra aceste proprietăți, voi demonstra următoarea proprietate:

Un patrulater cu laturile constante și unghiurile variabile, are suprafața maximă, când patrulaterul este inscriptibil în cerc.



Fie patrulaterul A B C D. Suprafața lui va fi:

$$S = \text{sup. } BCD + \text{sup. } ABD = \frac{b\,c \sin C}{2} + \frac{a\,d \sin A}{2}$$

Avem însă:

$$\overline{BD}^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos C = a^2 + d^2 - 2\,a\,d \cos A,$$

sau:

$$(1)\quad b^2 + c^2 - 2\,b\,c\sqrt{1-\sin^2 C} = a^2 + d^2 - 2\,a\,d\sqrt{1-\sin^2 A}$$

Anulând derivata suprafeței, vom găsi valorile unghiurilor A și C pentru care avem maxim sau minim:

$$(2)\quad (2\,S)' = b\,c \sin' C + a\,d \sin' A = 0.$$

Cele două variabile A și C, care intră în formula suprafeței, sunt legate prin relația (1). Derivând avem:

$$\frac{b\,c \sin C \sin' C}{\sqrt{1-\sin^2 C}} = \frac{a\,d \sin A \sin' A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}$$

$$(3)\quad b\,c \operatorname{tg} C \sin' C = a\,d \operatorname{tg} A \sin' A$$

Eliminând $\sin' A$ și $\sin' C$ din relațiile (2) și (3), obținem:

$$\operatorname{tg} A = -\operatorname{tg} C$$

$$A + C = 180^\circ$$

și deci patrulaterul este iscriptibil.

Să vedem acum dacă avem maxim sau minim. In cazul patrulaterului inscriptibil, din (1) deducem:

$$(4)\quad \cos C = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2\,(b\,c + a\,d)}$$

$$\sin C = \sqrt{1-\cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2\,b\,c + 2\,a\,d}\right)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{b\,c + a\,d}$$

în care p este semiperimetrul patrulaterului.

Suprafața patrulaterului inscriptibil va fi:

$$S = \frac{b\,c \sin C + a\,d \sin C}{2} = \frac{1}{2}(b\,c + a\,d) \sin C =$$

$$\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Pentru ca să arătăm că pentru $A+C=180^0$ avem maxim și nu minim, e suficient să arătăm că valoarea precedentă găsită pentru suprafața patrulaterului inscriptibil, este mai mare decât suprafața unui alt patrulater cu aceleași laturi, dar cu alte unghiuri, de exemplu pentru $B=180^0$ dacă $a+b<c+d$, sau $D=180^0$ dacă $c+d<a+b$. Patrulaterul se reduce atunci la un triunghiu și suprafața lui va fi:

$$S=\sqrt{p(p-c)(p-d)(p-a-b)}$$

care se poate constata ușor că este mai mică decât suprafața precedentă.

Putem generaliza această proprietate astfel: Un poligon cu laturile constante și unghiurile variabile are suprafața maximă, când este inscriptibil în cerc.

Suprafața unui asemenea poligon variabil cu laturile constante fiind limitată, trebue să aibă un maxim pentru sisteme de valori ale unghiurilor. Să presupunem poligonul nostru ABCDEF.. cu laturile constante, construit cu un asemenea sistem de unghiuri și care ar avea deci suprafața maximă: Să demonstrăm că 4 vârfuri consecutive oarecare, de ex. B, C, D, E, sunt așezate pe un cerc. Dacă nu sunt așezate pe un cerc, lăsăm neschimbat restul poligonului și diformăm patrulaterul BCDE, fără să-i variem lungimea laturilor, ci numai unghiurile, astfel ca să devină BC'D'E inscriptibil și deci cu suprafața mai mare:

$$\text{sup. } BCDE<\text{sup. } BC'D'E.$$

Atunci suprafața poligonului ABCDEF... va fi mai mică decât suprafața poligonului ABC'D'EF... și deci poligonul ABCDEF... n'ar avea suprafața maximă, ceace ar fi contra ipotezei.

Deci vârfurile B, C, D, E, sunt așezate pe un cerc, și tot așa demonstrăm că și vârfurile C, D, E, F sunt așezate pe un cerc, care este identic cu precedentul, fiindcă are trei puncte comune C, D, E, și succesiv putem demonstra că toate vârfurile poligonului sunt pe același cerc.

O linie curbă închisă, poate fi considerată ca o linie poligonală închisă, cu n laturi foarte mici și foarte multe și deci conform demonstrației precedente, ca să închidă o suprafață maximă trebue să fie înscrisă în cerc, adică să aibă forma de cerc.

Dacă linia de lungime constantă, care închide o suprafață variabilă, este compusă din două sau mai multe linii închise, cercul format din întreaga linie închide suprafața maximă, căci dacă însemnăm cu $2\pi R_1$, $2\pi R_2$, $2\pi R_3$,... lungimea liniilor componente, suprafețele maxime închise de aceste linii vor fi πR_1^2, πR_2^2, πR_3^2,... iar suprafața maximă închisă de suma liniilor $2\pi R_1+2\pi R_2+2\pi R_3+\ldots$ este $\pi(R_1+R_2+R_3+\ldots)^2$, care evident este mai mare decât suma suprafețelor componente maxime

$$\pi R_1^2+\pi R_2^2+\pi R_3^2+\ldots$$

Proprietatea cercului fiind demonstrată, să demonstrăm acum proprietatea sferei:

2°. Fie V volumul cel mai mare dintre volumele închise de suprafețe egale cu S. Există două plane paralele cu o direcție arbitrară, tangente la V în un punct, sau după o linie sau după o suprafață plană și care să cuprindă între ele întregul volum V, plane ce se pot obține prin deplasarea continuă a unui plan paralel cu el însuși, până când ocupă pozițiunile indicate.

Fie AB distanța între cele două plane tangente. Să demonstrăm că volumul V este de revoluție în jurul unei axe paralele cu AB, care este presupusă de direcție arbitrară.

Să presupunem că V nu este de revoluție în jurul unei axe paralelă cu AB. Impărțim distanța AB în n părți egale și prin punctele de diviziune 0, 1, 2,... k,... n ducem plane paralele cu planele tangente. Volumul V se împarte în n volume și suprafața S în n suprafete. Fie h distanța între două plane consecutive, C_k lungimea liniei de intersecție a suprafeței S cu planul dus prin diviziunea corespunzătoare, sau suma liniilor de intersecție, când planul taie suprafața după mai multe linii, S_k suprafața sau suma suprafețelor închise de linia C_k, și V_k volumul cilindrului cu baza S_k și înălțimea h. Suma volumelor V_k corespunzătoare la toate diviziunile ne va da la limită când n crește indefinit volumul V. Suprafața S s'a descompus în n suprafețe și dacă însemnăm cu σ_k suprafața cuprinsă între secțiunile S_k și S_{k+1}, atunci suma $\Sigma\sigma_k$ pentru toate diviziunile ne va da S.

Putem coustrui triunchiuri de con de revoluție T_k, T_{k+1}, etc., cu înălțimele egale cu h, cu lungimea unui cerc de bază egală cu C_k, C_{k+1}, etc. și

cari aşezate una peste alta, cu centrele bazelor în linie dreaptă, să ne dea un volum V' cu suprafaţa egală cu S.

Această posibilitate o putem arăta astfel: Suprafaţa σ_k o putem considera formată din o infinitate de trapeze mici, aşezate pe planele tangente la V în diferite puncte ale unei linii de pe suprafaţa sa cuprinsă între C_k şi C_{k+1}, şi ale căror baze sunt pe planele S_k şi S_{k+1}. Înălţimele acestor trapeze sunt mai mari sau egale cu h. Făcând suma suprafeţelor acestor trapeze în care înlocuim înălţimele prin o înălţime mijlocie $g_k \geqq h$, găsim la limită când numărul planelor tangente tinde către infinit:

$$\sigma_k = \frac{C_k + C_{k+1}}{2} \times g_k, \text{ sau } \sigma_k = \pi (R_k + R_{k+1}) \times g_k,$$

dacă punem $C_k = 2\pi R_k$ şi $C_{k+1} = 2\pi R_{k+1}$.

Să presupunem că $C_{k+1} > C_k$, căci altfel am schimba ordinea indicilor. Trunchiurile de con aşezate unele peste altele iau una din cele trei forme indicate în figurile alăturate. Dacă însemnăm cu g'_k,

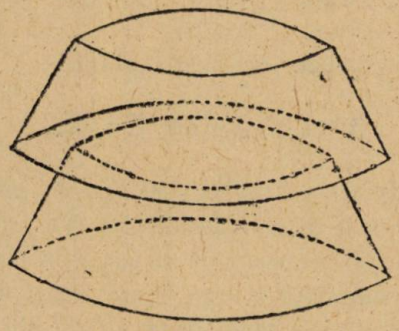


Fig. 1

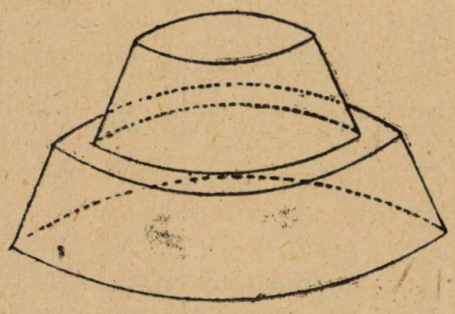


Fig. 2

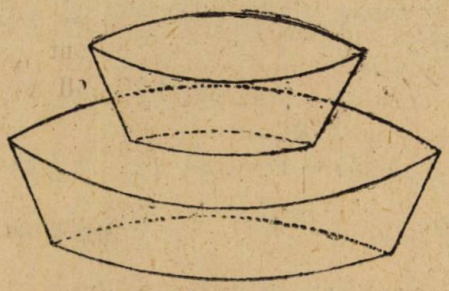


Fig. 3

generatoarea trunchiului de con T_k, $C'_k = 2\pi R'_k$ lungimea celuilalt cerc de bază, din triunghiul dreptunghiu format de generatoarea g'_k, înălţimea h şi diferenţa razelor R_k şi R'_k, scoatem pentru figurile I şi II relaţia: $R'_k = R_k + \sqrt{g'^2_k - h^2}$, iar pentru figura III relaţia: $R'_k = R_k - \sqrt{g'^2_k - h^2}$.

In cazul figurei I avem $R'_k > R_{k+1}$ şi suprafaţa solidului format se compune din suprafeţele laterale ale trunchiurilor de con T_k, T_{k+1}, etc. şi din suprafeţele coroanelor cuprinse între cercurile C'_k şi C_{k+1}, C'_{k+1} şi C_{k+2}, etc. Pentru ca suprafaţa acestui solid să fie egală cu suprafaţa S a solidului considerat V, este suficient ca suprafaţa laterală a trunchiului de con T_k, adunată cu suprafaţa coroanei cuprinsă între C'_k şi C_{k+1}, să fie egală cu σ_k, suprafaţa elementară de pe volumul V, pentru toate trunchiurile de con. Aşa că trebue să avem egalitatea:

$$\pi(R_k + R_{k+1}) \times g_k = \pi(R_k + R'_k) \times g'_k + \pi(R'^2_k - R^2_{k+1})$$

$$= \pi\left(2R_k + \sqrt{g'^2_k - h^2}\right) g'_k + \pi\left(R^2_k - R^2_{k+1} + g'^2_k - h^2 + 2R_k\sqrt{g'^2_k - h^2}\right)(R_k + R_{k+1}) \times g_k + \left(R^2_{k+1} - R^2_k\right)$$

$$= 2R_k g'_k + g'_k\sqrt{g'^2_k - h^2} + g'^2_k - h^2 + 2R_k\sqrt{g'^2_k - h^2}.$$

In această egalitate se vede că membrul întâi este constant şi mai mare decât $2R_k h$, iar membrul al doilea creşte când g'_k creşte şi g'_k crescând începând dela h, membrul al doilea creşte începând dela $2R_k h$ şi deci va trece odată prin valoarea membrului întâi, care am arătat că este mai mare sau egal cu $2R_k h$, pentru o valoare anumită a generatoarei g'_k.

Dacă $R'_k < R_{k+1}$, trunchiurile de con sunt așezate ca în figura II sau III. Pentru figura II avem egalitatea:

$$(R_k + R_{k+1})\, g_k - (R^2_{k+1} - R^2_k) =$$

$$2R_k(g'_k - \sqrt{g'^2_k - h^2}) + g'_k\sqrt{g'^2_k - h^2} - g'^2_k + h^2,$$

iar pentru figura III:

$$(R_k + R_{k+1})\, g_k - (R^2_{k+1} - R^2_k) =$$

$$2R_k(g'_k + \sqrt{g'^2_k - h^2}) - g'_k\sqrt{g'^2_k - h^2} - g'^2_k + h^2.$$

Membrii întâi de la ambele egalități sunt identici, iar membrii doi depind de g'_k și cum g'_k și h sunt infinit mici, putem neglija termenii de grade superioare în raport cu g'_k și h, pentru a studia variațiunea membrului doi. Termenii $g'_k\sqrt{g'^2_k - h^2}$, g'^2_k și h^2 sunt de gradul II și se poate constata aceasta. dacă punem $h = g'_k \cos\alpha$, în care α este unghiul făcut de g'_k și h, căci atunci acești termeni devin $g'^2_k \sin\alpha$, g'^2_k și $g'^2_k \cos\alpha$. în cari coeficienții deși sunt variabili, dar sunt finiți și mai mici ca 1. Ceilalți termeni sunt de gradul I, așa că din membrul al doilea din prima egalitate rămâne:

$$2R_k(g'_k - \sqrt{g'^2_k - h^2}) = \frac{2R_k h^2}{g'_k + \sqrt{g'^2_k - h^2}}$$

care — se vede ușor — descrește când g'_k crește, iar din membrul doi din a doua egalitate rămâne:

$$2R_k(g'_k + \sqrt{g'^2_k - h^2})$$

care crește când g'_k crește pentru valori foarte mici a lui g'_k. Deci când g'_k crește începând dela h pentru valori foarte mici, membrul doi al primei egalități descrește începând dela $2R_k h$, iar membrul doi dela a doua egalitate crește începând dela $2R_k h$.

Așa că dacă membrul întâi $(R_k + R_{k+1})\, g_k - (R^2_{k+1} - R^2_k)$ care de asemenea este o cantitate infinit mică, este mai mai mare decât $2R_k h$, atunci putem găsi un g'_k așa ca egalitatea întâia să fie satisfăcută, iar dacă $(R_k + R_{k+1})g_k - (R^2_{k+1} - R^2_k) < 2R_k h$, putem găsi un g'_k așa că egalitatea a doua să fie satisfăcută.

Deci în toate cazurile putem construi trunchiuri de con de revoluție, în condițiile impuse, astfel ca așezate unul peste altul să ne dea un solid V' cu suprafața egală cu a solidului V și de revoluție în jurul unei axe.

Să arătăm acum că volumul $V' > V$. Avem:

$$\text{Vol. } T_k = \frac{\pi}{3} h\,(R^2_k - R'^2_k + R_k R'_k) =$$

$$\frac{\pi}{3} h\,(3R^2_k \pm 3R_k\sqrt{g'^2_k - h^2} + g'^2_k - h^2) =$$

$$= \pi h R^2_k \pm \pi h R_k\sqrt{g'^2_k - h^2} + \frac{\pi}{3}(g'^2_k - h^2),$$

$$V' = \Sigma T_k = \Sigma \pi h R^2_k \pm \Sigma \pi h R_k\sqrt{g'^2_k - h^2}$$

$$+ \Sigma \frac{\pi}{3} h\,(g'^2_k - h^2).$$

Fie g' valoarea cea mai mare a lui g'_k și R' cea mai mare valoare a lui R_k. Atunci avem:

$$V' = \Sigma T_k \leq \Sigma \pi h R^2_k + \pi R' g' \Sigma h + \frac{\pi}{3} g'^2 \Sigma h$$

$$V' \leq \Sigma \pi h R^2_k + \pi R' g' A B + \frac{\pi}{3} g'^2 A B.$$

și fiindcă g' tinde către zero, avem:

$$V' = \Sigma T_k = \lim.\ \Sigma \pi h R^2_k.$$

Am afirmat că $V = \Sigma V_k$ în care V_k este un cilindru cu baza S_k și înălțimea h. Voi demonstra elementar aceasta, deși este cunoscut în analiză. Am arătat că suprafața σ_k este limita sumei trapezelor așezate pe planele tangente în puncte ale unei linii intermediare celor două sectiuni S_k și S_{k+1}, iar volumul V'_k l'am putea considera ca limita unui trunchiu de piramidă cu bazele S_k și S_{k+1} și înălțimea h. Secțiunile S_k și S_{k+1} fiind infinit vecine, putem pune $S_{k+1} = S_k + \varepsilon_k$, în care ε_k este o cantitate foarte mică care tinde către zero, când h tinde către zero.

Vom avea:

$$V'_k = \frac{h}{3}(S_k + S_{k+1} + \sqrt{S_k \cdot S_{k+1}}) =$$

$$\frac{h}{3}(3S_k + \varepsilon_k + \sqrt{S^2_k + \varepsilon_k \cdot S_k} - S_k).$$

Fie ε maximul cantităţii infinit mici ε_k şi ε' maximul cantităţii infinit mici $\sqrt{S_k^2+\varepsilon_k . S_k}-S_k$ şi care tinde către zero când h tinde către zero. Din egalitatea de mai sus, deducem:

$$V'_k \leqq h S_k + \frac{h}{3}|\varepsilon| + \frac{h}{3}|\varepsilon'|$$

$$V=\Sigma V'_k \leqq \Sigma h S_k + \left|\frac{\varepsilon}{3}\right| \Sigma h + \left|\frac{\varepsilon'}{3}\right| \Sigma h =$$

$$\Sigma h S_k + \left|\frac{\varepsilon}{3}\right| A B + \left|\frac{\varepsilon'}{3}\right| A B.$$

Când h tinde către zero, ε şi ε' tind către zero şi avem:

$$V = \lim . \Sigma h S_k.$$

Să comparăm volumul $V' = \lim . \Sigma \pi h R_k^2$ cu volumul $V = \lim . \Sigma h S_k$. La fiecare secţiune S_k din volumul V corespunde o secţiune circulară $S'_k = \pi R_k^2$ din volumul V' şi $S'_k > S_k$, fiindcă amândouă secţiunile au acelaşi perimetru C_k şi după cele spuse la început. suprafaţa circulară este mai mare. Atunci $h S'_k > h S_k$ şi deci $\Sigma h S'_k > \Sigma h S_k$, adică $V' > V$ şi deci volumul V considerat la început nu este maxim, decât când este de revoluţie în jurul unei axe paralele cu A B.

Fiindcă direcţia acestei axe de revoluţie este arbitrară, rezultă că orice secţiune în solidul V este circulară şi deci şi secţiunea care trece prin axa de revoluţie va fi circulară, adică solidul V este o sferă.

Şi reciprocele sunt adevărate:

O linie variabilă, care închide o suprafaţă constantă este minimă, când linia este un cerc.

Din două linii C *şi* C' *cari închid aceiaşi suprafaţă* S, *linia* C *fiind un cerc va fi mai mică ca* C' *care nu este cerc.* Dând lui C' forma unui cerc, va înconjura atunci, după cum am arătat, o suprafaţă maximă mai mare decât S, şi atunci suprafaţa cercului C' fiind mai mare decât suprafaţa sercului C, rezultă că linia $C < C'$.

O suprafaţă variabilă, care închide un volum constant, este mtnimă, când suprafaţa este o sferă.

Din două suprafeţe S *şi* S' *care închid acelaşi volum* V, *suprafaţa* S *fiind o sferă, va fi mai mică decât suprafaţa* S' *care nu este sferă.* Dând suprafeţei S' forma unei sfere, va înconjura atunci un volum maxim mai mare ca V şi atunci volumul sferei S' fiind mai mare va volumul V al sferei S, rezultă că suprafaţa $S < S'$.

O consecinţă imediată rezultă din demonstraţia dela început.

Cu n lungimi date, astfel ca cea mai mare să fie mai mică decât suma celorlalte, se poate construi un poligon inscriptibil în cerc, şi numai unul singur.

Cu aceste n lungimi putem construi un poligon pe care îl diformăm aşa ca să aibă suprafaţa maximă şi atunci va fi înscriptibil în cerc. Va fi o singură soluţie, dacă ordinea laturilor nu se schimbă, ceiace se poate constata uşor pentru $n = 4$ din formula (4), care ne dă o singură soluţie, pentru $\widehat{C}$. Pentru $n \geqq 4$, dacă presupunem că construim cu cele n laturi luate în aceiaşi ordine, două poligoane înscriptibile în două cercuri diferite ca mărime, atunci laturile poligonului înscris în cercul mai mic, vor subîntinde, evident, arce mai mari în grade decât arcele corespunzătoare dela celalt cerc. Atuni suma arcelor subîntinse de toate laturile poligonului întâi, va fi mai mare decât suma corespunzătoare dela poligonul al doilea, ceiace nu se poate, fiindcă această sumă trebue să fie egală cu 360°.

Dacă schimbăm ordinea laturilor în toate modurile, obţinem $\frac{(n-1)!}{2}$ poligoane distincte inscriptibile în tot atâtea cercuri, cari toate sunt egale. Intr'adevăr, un asemenea poligon poate fi descompus în n triunghiuri isoscele cu vârful comun în centrul cercului, în care suma unghiurilor de la vârf este egală cu 360°, iar laturile acestor unghiuri sunt egale cu raza cercului. Alăturând aceste triunghiuri isoscele în altă ordine, cu vârfurile confundate într'un punct, vom obţine un alt poligon, fiindcă suma unghiurilor dela vârf a rămas tot 360°, iar laturile acestor unghiuri au rămas egale între ele şi egale cu raza cercului circumscris acestui nou poligon, adică raza cercului nu s'a schimbat. Din această demonstraţie rezultă că şi suprafaţa poligonului nu s'a schimbat.

NOTE MATEMATICE

15. *Asupra funcțiunilor trigonometrice inverse.* Fie:

$$\arcsin x = \arccos y = \operatorname{arc\,tg} z = \operatorname{arc\,cot} u = \operatorname{arc\,sec} v = \operatorname{arc\,cosec}\ \omega = a,$$

atunci avem și:

$$x = \sin a,\ y = \cos a,\ z = \operatorname{tg} a,\ u = \cot a,$$

$$v = \sec a,\ \omega = \operatorname{cosec} a,$$

și ținând seamă de relațiile dintre liniile trigonometrice ale unui același arc avem următoarele identități:

$$\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} =$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,cot}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} =$$

$$\operatorname{arc\,sec}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,cosec}\frac{1}{x}$$

$$\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} =$$

$$\operatorname{arc\,cot}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sec}\frac{1}{x} = \operatorname{arc\,cosec}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$\operatorname{arc\,cot}\frac{1}{x} = \operatorname{arc\,sec}\sqrt{1+x^2} = \operatorname{arc\,cosec}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\operatorname{arc\,cot} x = \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \operatorname{arc\,sec}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \operatorname{arc\,cosec}\sqrt{1+x^2}.$$

Voi stabili acum alte relații. Fie de exemplu:

$$\arcsin a + \arcsin b = \arcsin x,$$

să găsim pe x. Luând sinusul în ambii membri, găsim:

$$a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2} = x,$$

deci avem identitatea:

$$\arcsin a + \arcsin b = \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right)$$

și ținând seamă de relațiile de mai sus găsim că:

$$\arcsin a + \arcsin b = \operatorname{arc\,tg}\frac{a\sqrt{1-a^2} + b\sqrt{1-b^2}}{1-a^2-b^2}.$$

In mod analog găsim:

$$\arccos a + \arccos b = \arccos\left(a\,b - \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right)$$

$$\operatorname{arc\,tg} a + \operatorname{arc\,tg} b = \operatorname{arc\,tg}\frac{a+b}{1-ab}$$

$$\arcsin a + \arccos b = \arcsin\left(a\,b + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right)$$

$$\arcsin a + \arccos b = \arccos\left(b\sqrt{1-a^2} - a\sqrt{1-b^2}\right)$$

Fie:

$$\arcsin a + \operatorname{arc\,tg} b = \arcsin x$$

punem:

$$\arcsin a = \alpha,\ \operatorname{arc\,tg} b = \beta,\ \arcsin x = \gamma,$$

deci:

$$\alpha + \beta = \gamma$$

și luăm sinusul:

$$\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = \sin\gamma$$

dar:

$$\sin\alpha = a,\ \sin\beta = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}},\ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}},\ \sin\gamma = x$$

deci:

$$\arcsin a + \operatorname{arc\,tg} b = \arcsin\frac{a + b\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1+b^2}}.$$

Se pot stabili analog multe identități.

Tot așa vom găsi:

$$\arcsin a + \arcsin b + \arcsin c =$$

$$\arcsin\left(a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)} + b\sqrt{(1-a^2)(1-c^2)} + c\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} - abc\right)$$

$$\arccos a + \arccos b + \arccos c =$$

$$\arccos\left(abc - \Sigma a\sqrt{(1-b^2)(1-c^2)}\right)$$

EMIL STEFANESCU

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXI, No. 3, Noembrie 1925. Formula produsului numerilor prime cu un număr dat şi inferioare lui, de *Căpitan I. Linteş*. Regulă pentru dezvoltarea unui determinant de ordinul al patrulea, de *Vladimir I. Tunițchi*. Concursul *„Gazetei Matematice"*. Premiul *„Anghel Saligny"*. Premiul *„Vasile Conta"*.

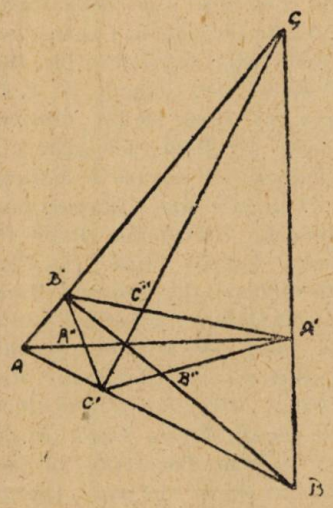
2. *Foia Matematică*, anul al II-lea No. 11, Noembrie 1925. Asupra unei identităţi, de Tr. *A. Dordea*.

3. *Curierul Matematic*, vol. I. No. 9, Noembrie 1925. Generalizarea unor teoreme de geometrie de *I. C. Vasiliu* şi *N. G. Botea*.

PROBLEME REZOLVATE

276. — *Fie ABC un triunghiu oarecare, $A'B'C'$ triunghiul său ortic. Notăm cu A'', B'', C'' intersecţiile $(AA', B'C')$, $(BB', A'C')$, $(CC', A'B')$. Să se găsească expresiunile lungimilor $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ în funcţiune de unghiurile triunghiului ABC şi de raza cercului circum scris lui.*

I. COSEREANU



Ştim că înălţimele unui triunghiu sunt bisectoarele triunghiului său ortic, deci $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ sunt bisectoarele triunghiului $A'B'C'$, ale cărui laturi, fie a', b', c'. Sunt cunoscute apoi expresiunile bisectoarelor unui triunghiu, în funcţie de laturile şi unghiurile sale, aşa că putem scri:

$$(1) \qquad A'A'' = \frac{2\,b'\,c'}{b'+c'} \cos\frac{A'}{2}.$$

Dar se cunosc relaţiile dintre laturile triunghiului ortic $A'B'C'$ şi unghiurile şi raza cercului circumscris a triunghiului ABC, anume:

$$(2) \qquad a' = R\sin 2A, \quad b' = R\sin 2B, \quad c' = R\sin 2C.$$

De altă parte, din patrulaterul înscriptibil $A'CB'C'$, observăm că:

$$\sphericalangle\frac{A'}{2} = \widehat{C'CA} = 90^0 - \hat{A}, \text{ de unde:}$$

$$(3) \qquad \cos\frac{A'}{2} = \sin A.$$

Atunci, relaţia (1) în virtutea relaţiilor (2) şi (3) se poate scri succesiv:

$$A'A'' = \frac{2R^2\sin 2B\sin 2C\sin A}{\sin 2B+\sin 2C} =$$

$$\frac{2R^2\sin 2B\sin 2C\sin A}{2\sin(B+C)\sin(B-C)} = \frac{R^2\sin 2B\sin 2C}{\sin(B-C)},$$

fiindcă:

$$\sin A = \sin(B+C).$$

Analog, avem:

$$B'B'' = \frac{R^2\sin 2A\sin 2C}{\sin(A-C)}, \quad C'C'' = \frac{R^2\sin 2A\sin 2B}{\sin(A-B)}$$

Soluţii date de d-nii: *Bârghazan Aurel* (Şc. Polit. Timişoara), *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Berdan C.* (Şc. Polit., Bucureşti), *Blumenfeld David* (lic. Botoşani), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Epure T Ştefan* (Buzău), *Florea Alexandru* (lic. Internat, Iaşi), *Gabrielescu Vasile* (Brăila), *I. N. Georgescu-Val.* (Giurgiu), *Grofşorean I. Gheorghe* (lic. Arad), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu I. Paul* (lic. M-rea Dealu), *Katz Pincu* (Galaţi), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Marinescu I. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Mihăilescu Romea* (R.-Vâlcea), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Popeea G. Ovidiu* (Chişinău), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iaşi), *Popovici Th. Ioan* (student), *Silion Gh. Ion* (lic. Braşov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Stamatiu Mihail* (student), *Stefănescu Emil* (lic. Spiru-Haret), *Tauber Alexandru* (lic. Botoşani), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai Viteazul), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Udrisky Traian* (lic. Arad) şi *Weis Solomon* (lic. Galaţi).

325.[1] — *Să se dovedească că într'un triunghiu oarecare avem relația:*

$$\frac{a^3bc+ab^3c+abc^3}{sp-r^3-4Rr^2}=-\frac{2}{r^2p^2}(s-r_ap)(s-r_bp)(s-r_cp),$$

notațiile fiind cele obicinuite.

MAURICIU GHELBER

Primul membru al relației cerute se poate scri:

$$(1)\qquad \frac{a^3bc+ab^3c+abc^3}{sp-r^3-4Rr}=\frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{sp-r^3-4Rr}.$$

Dar în virtutea relațiilor cunoscute:

$s=pr,\ 4Rs=abc,\ s^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$,

putem scri:

$$sp-r^3-4Rr^2=r(p^2-r^2-4Rr)=$$

$$\frac{r}{p}(p^3-pr^2-4Rs)=$$

$$\frac{r}{p}[p^3-(p-a)(p-b)(p-c)-abc]=$$

$$\frac{r}{p}[p^2(a+b+c)-p(ab+bc+ac)]=$$

$$r[p(a+b+c)-(ab+bc+ac)]=$$

$$\frac{r}{2}[(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)]=$$

$$\frac{r}{2}(a^2+b^2+c^2).$$

Egalitatea (1) se mai poate scri deci:

$$(2)\qquad \frac{a^3bc+ab^3c+abc^3}{sp-r^3-4Rr^2}=\frac{2abc(a^2+b^2+c^2)}{r(a^2+b^2+c^2)}=\frac{2abc}{r}$$

De altă parte în virtutea relațiilor cunoscute:

$$s=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c=rp \text{ și}$$

$$r_ar_br_c=\frac{s^3}{(p-a)(p-b)(p-c)}=ps,$$

membrul al 2-lea al relației cerute, se poate scri succesiv:

$$(3)\qquad -\frac{2}{r^2p^2}(s-r_ap)(s-r_bp)(s-r_cp)=$$

$$-\frac{2}{r^2p^2}(-ar_a)(-br_b)(-cr_c)=$$

$$\frac{2abcr_ar_br_c}{r^2p^2}=\frac{2abcps}{r^2p^2}=\frac{2abc}{r}.$$

Din relațiile (2) și (3) rezultă:

$$\frac{a^3bc+ab^3c+abc^3}{sp-r^3-4Rr^2}=$$

$$-\frac{2}{r^2p^2}(s-r_ap)(s-r_bp)(s-r_cp),$$

tocmai relația cerută.

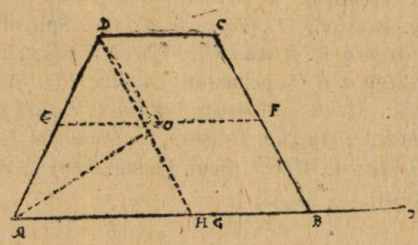
Soluții date de d-nii: *Angelescu N. Traian* (lic. Giurgiu), *Ardelea Radu* (lic. Militar, Craiova), *Beju O. Traian* (lic. Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Berdan C.* (Șc. Polit., București), *Beșchea G. Nicolae* (lic. Brașov), *Blumenfeld M. David* (lic. Botoșani), *Boju Rosetel* (lic. Timișoara), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Braeșter Otto* (lic. Național, Iași), *Brüll M. Leon* (lic. Cantemir, București), *Ciorănescu I. C-tin* (lic. M-rea Dealu), *Corșoreanu Gh. Gheorghe* (Tg.-Jiu), *Cristea Aurel* (Șc. Polit., Timișoara), *Dânga S. Vlad* (lic. Orheiu), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dimitrescu Mișu* (lic. Roman), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iași), *Florea C. Alexandru* (lic. Internat, Iași), *Frătici Ioan* (Șc. Polit., Timișoara), *Gataianțu V. Barbu* (lic. Caracal), *I. N. Georgescu-Val.*, *Georgescu Jean* (lic. M-rea Dealu), *Grabovski Eug.*, *Gradiny I. Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Grigorescu L. Ioan* (M-rea Dealu), *Grofșoreanu I. Gheorghe* (lic. Arad). *Grubenmann I. Grigore* (lic. Cantemir, București), *Iacob Șt. Eug.* (Botoșani), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic, Cantemir, Bucnrești), *Ionescu Angelo* (Șc. Polit., Timișoara), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic, Cantemir, București), *Ionescu I. Paul* (iic. M-rea Dealu), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iași), *Manoil Adolf* (lic. Roman), *Manolescu I. Niculae* (lic. Focșani), *Marcovici H.* (Botoșaui), *Marinescu I. Ioan* (lic. M-rea Dealu), *Mihăilescu Romeo* (R.-Vâlcea), *Mitran Șt. Grigore* (Craiova), *Neacsu Vasile* (lic. Brașov), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Nicolau G. C.* (lic. R.-Sărat), *Pătroianu I. Mihail* (lic. M-rea Dealu), *Placa Mircea* (lic. Botoșani), *Pop Alexandru* (Șc. Polit., Timișoara), *Popp Emilian* (lic. M-rea Dealu), *Popescu Dem. Marin* (lic. Giurgiu), *Popovici C. C-tin* (lic. Internat, Iași), *Popovici Th. Ion* (student), *Râmniceanu L. Radu* (Tg.-Jiu), *Samoilă D-tru* (lic. Câmpina), *Schmautz Al. G.* (Roman), *Silion Gh. Ion* (lic. Brașov), *Simionescu D. Gh.* (lic. M-rea Dealu), *Spacu Gh. Petru* (Șc. Polit., Timișoara), *Stamatescu I. Valeriu* (București), *Stefânescu Emil*, *Stroescu I. Gheorghe* (lic. Tg.-Mureș), *Sușelescu Ion* (lic. M-rea Dealu), *Tăraș*

[1] Enunț rectificat în sensul că membrul al 2-lea s'a luat cu semnul —, ceia ce a fost observat aproape de toți corespondenții ce au trimes soluția.

Vasile (lic. Braşov), *Tărăbuţă C. Paul* (lic. Mihai-Viteazul, Bucureşti), *Tunaru R. Traian* (Craiova), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, Bucureşti) şi *Vasiliu C. Ion* (lic. M-rea Dealu).

422. — *Să se construiască un trapez isoscel, fiind cunoscută mărimea AB a unei baze, mărimea laturei neparalele AC şi ştiind că există un punct O egal depărtat de toate laturile.*

P. TROFINOV



Presupunem problema rezolvită. Fie ABCD trapezul isoscel cerut şi $AB = a$, $BC = AD = b$ date. Existând un punct O egal depărtat de toate laturile, evident că el se găseşte pe bisectoarele unghiurilor suplimentare A şi D, deci $\widehat{AOD} = 90^0$. Dreapta EF ce uneşte mijloacele laturilor neparalele, trebuind să treacă prin O, rezultă că în triunghiul dreptunghic AOD, avem:

$$EO = \frac{AD}{2} = \frac{b}{2},$$

analog $OF = \frac{b}{2}$. Rezultă, $EF = AD = b$.

Pe de altă parte ştim că:

$$EF = \frac{AB + DC}{2},$$

rezultă că:

$$DC = 2b - a$$

Ducând apoi DH paralelă la BC, avem:

$$DH = BC = AD = b,$$

deci triunghiul ADE este isoscel, având baza:

$$AH = a - DC = 2(a - b).$$

De aci rezultă următoarea construcţie. Luăm un segment $AB = a$, tot din A luăm $AG = b$, apoi $BI = BG$ şi măsurăm:

$$AH = GI = 2(a - b).$$

Din A şi H cu b ca raze, descrim arce de cerc ce se întâlnesc în D şi D'. Ducem apoi DC şi D'C' paralele la AB şi egale cu HB, avem astfel trapezele isoscele ABCD şi ABC'D', cerute.

Observare. Pentru ca problema să fie posibilă trebue ca arcele de cerc descrise din A şi E cu b ca rază, să se întâlnească, adică:

$$AH < 2b \text{ sau } a < 2b.$$

Soluţii date de d-nii: *Beldie D-tru* (R.-Sărat), *Berdan C.* (Şc. Polit., Bucureşti), *Beschea Nicolae* (lic. Braşov) *Blasko Beatrix* (Lugoj), *Boghiu Iosif* (lic. Braşov), *Braester Otto* (lic. Naţional, Iaşi), *Istime I. C. Brezuica* (lic. Caracal), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Călniceanu Gh.* (lic. Tg.-Jiu), *Chirila Ion* (lic. Internat, Iaşi), *Ciomofoiu Horia* (lic. Sibiu), *Corsoreanu Gh. Gheorghe* (lic. Tg.-Jiu), *Curcubată Dionisie* (lic. Braşov), *Diaconu B. Marin* (lic. M-rea Dealu), *Dorneanu S. Vasile* (lic. Internat, Iaşi), *Drogeanu N. Paul* (Semin. Ped. Bucureşti), *Dravătz I.* (lic. Ploeşti), *Dugan C. Victor* (lic. M-rea Dealu), *Florescu M. Octav* (lic. Caracal), *Frumuselu H. Gheorghe* (lic. Braşov), *Gârlesteanu Mihail* (Şc. Polit., Timişoara), *Gheorghiu Adrian* (lic. Ploeşti), *Grigore T. Virgil, Handjieff V.* (Şc. Polit., Timişoara), *Iliovici C-tin* (lic. Ploeşti), *Ionescu Th. Bujor C-tin* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Katz Lazăr* (lic. Botoşani), *Manoil Eugen* (Maior din Artilerie), *Manolescu I. Niculae* (lic. Focşani), *Mareş A.*, *Marius Mariş* (lic. Arad), *Motaş C.* (Bucureşti), *Munteanu I. Gheorghe* (lic. Milit., Craiova), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Nicolescu I. Emil* (Ploeşti), *Novacu A. Valeriu* (lic. Arad), *Paszko Vilhelm* (Bucureşti), *Popovici Aurel* (lic. Focşani), *Popovici Th. Ioan, Popovici I. Puiu Dan* (Chişinău), *Rătan I.* (lic. Braşov), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Reşnoveanu Emil* (lic. Braşov), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Braşov), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Stoica S. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Teodorescu C.* (lic. Tg.-Mureş), *Teorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Toescu D. Luis* (Bârlad), *Tanovici V. C-tin, Ulea C. Titus* (lic. Internat, Iaşi) şi *Zamfirescu Gh.* (lic. Piteşti).

467. — *Dacă:*

$$a + b + c = 0,$$

atunci avem:

$$\frac{a^2(a^2 - 2bc)}{a^4 - (b-c)^4} + \frac{b^2(b^2 - 2ac)}{b^4 - (a-c)^4} + \frac{c^2(c^2 - 2ab)}{c^4 - (a-b)^4} = \frac{3}{8}.$$

N. G. BOTEA

Observăm că:

$$a^4 - (b-c)^4 = [a^2 - (b-c)^2][a^2 + (b-c)^2] =$$

$$(a+b-c)(a-b+c)[(a+b+c)^2 - 2(ab+ac+2bc)].$$

Folosind relaţia de condiţie şi observând că din ea deducem:

$$a+b=-c,\quad a+c=-b,\quad b+c=-a,$$

putem scri:

$$(1)\qquad a^4-(b-c)^4=8bc(a^2-2bc).$$

In mod analog, deducem:

$$(2)\qquad \begin{cases} b^4-(a-c)^4=8ac(b^2-2ac) \\ c^4-(a-b)^4=8ab(c^2-2ab). \end{cases}$$

Notând cu A primul membru al identităţii date, şi folosind relaţiile (1) şi (2), putem scri:

$$A=\frac{a^2(a^2-2bc)}{8bc(a^2-2bc)}+\frac{b^2(b^2-2ac)}{8ac(b^2-2ac)}+\frac{c^2(c^2-2ab)}{8ab(c^2-2ab)}=$$

$$\frac{a^2}{8bc}+\frac{b^2}{8ac}+\frac{c^2}{8ab}=$$

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{8abc}=\frac{(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3}{8abc}.$$

Cum din relaţia de condiţie, deduc:

$$a+b=-c,$$

rezultă că:

$$A=\frac{-c^3+3abc+c^3}{8abc}=\frac{3abc}{8abc}=\frac{3}{8}.$$

Identitatea dată este astfel stabilită.

Soluţii date de d-nii: *Alter-Cogan L.* (Chişinău), *Bădescu Aurelian* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bernardis B.* (Şc. Polit., Timişoara), *Beşchea G. Nicolae* (lic. Braşov), *Caracaş I. Gheorghe* (lic. Botoşani), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Ciomofoiu Horia* (lic. Sibiu), *Ciuffu Petre* (lic. R.-Sărat), *Deoanca Nicolae, Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal) *Dravătz I.* (lic. Ploeşti) *Duport George* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Foca Ilie, Frăţilă D. Oancea* (lic, Ploeşti), *Frumuselu H. Gheorge* (lic. Braşov), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gavrilescu N. I.* (lic. Ploeşti), *Gradin I. Gheorghe* (Şc. Polit., Timişoara), *Grofşorean I. Gh.* (Comloş), *Handjief V.* (Şc. Polit., Timişoara), *Haralambie V.* (lic. Carol, Craiova), *Iacob Şt. Eugen* (lic. Botoşani), *Ieremia Petru* (lic. Timişoara), *Iliovici Constantin* (lic. Ploeşti), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti). *Katz Lazăr* (lic. Botoşani), *Kertesz I. Paul, Lăzărescu I. Ion* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Lepădatu Miclea* (lic. Cahul), *Lepădatu I. V.* (Iaşi), *Lindenberg L.* (Bucureşti), *Manoil A.* (Roman), *Mareş P., Marius Mariş* (lic. Arad), *Micula Ovidiu* (lic. Arad), *Mihăilescu Şt. Niculae* (lic. Matei-Basarab, Bucureşti), *Morţun Emil* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Munteanu Gheorghe* (lic. Militar, Craiova), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărăt), *Nicolescu I. Emil* (Ploeşti), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Patron Nicolae* (lic. Militar, Iaşi), *Păslaru I. Nicolae* (lic. R.-Sărat), *Pelin I. Ioan* (lic. Bacău), *Podariu Alexandru* (lic. Piatra-Neamţ), *Pop Iulian* (Şc. Polit., Timişoara), *Popescu N. Corneliu* (Giurgiu), *Popovici Aurel* (Focşani) *Popovici Th. Ioan, Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Rusanda Gheorghe, Schächter M. Ozias, Silistrarianu C.* (Ploeşti), *Simionov Kindin* (lic. Tulcea), *Spacu G. Petru* (Şc. Polit., Timişoara), *Stern B. Arthur* (lic. Carol, Craiova), *Stoica S. D-tru* (R.-Sărat), *Taraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Tunaru R. Traian* (lic. Carol, Craiova), *Ţanovici V. C-tin, Ţigoiu I.* (Constanţa), *Vasiliev Ilie* (lic. Tulcea), *Vasilescu C. Al.* (lic. Ploeşti), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Timişoara), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov), *Vulpanovici Boriş* (Chişinău), *Winkler A. Alfred* (Sem. Pedag., Iaşi) şi *Zamfirescu Alex.* (Piteşti).

Observare. Unii din corespondenţii de mai sus. au observat că în virtutea relaţiei de condiţie se poate scri:

$$\frac{a^2(a^2-2bc)}{a^4-(b-c)^4}=\frac{a^2[(b+c)^2-bc]}{(b+c)^4-(b-c)^4}=\frac{a^2(b^2+c^2)}{8bc(b^2+c^2)}=\frac{a^2}{8bc}$$

Restul ca în prima soluţie.

471. — *Să se găsească restul împărtirei numărului:*

$$5473^{4375},$$

prin 11.

CRISTESCU C. IOAN

Impărţind pe 5473 prin 11, putem scri succesiv:

$$5473^{4375}=(\text{mult. } 11+6)^{4375}=\text{mult. } 11+6^{4375}$$
$$=\text{mult. } 11+(6^5)^{875}=\text{mult. } 11+(36^2\times 6)^{875}$$
$$=\text{mult. } 11+[(\text{mult. } 11+3^2)\times 6]^{875}$$
$$=\text{mult. } 11+54^{875}=\text{mult. } 11+(\text{mult. } 11-1)^{875}$$
$$=\text{mult. } 11-1=\text{mult. } 11+10.$$

Restul căutat este deci 10.

Soluţii date de d-nii: *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Beschea G. Nicolae* (lic. Braşov), *Călin M. Gheoghe* (lic. Caracal), *Dinescu Florin* (lic. Ploeşti), *Feldstein M. Solomon* (lic. Pitesti), *Frumuşelu H. Gheorghe* (Braşov), *Gheorghiu C. Adrian* (lic. Piteşti), *Ierimia Petru* (lic. Timişoara), *Iliovici C-tin* (lic. Ploeşti), *Ionescu B. Alexandru* (lic. Piteşti), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti).

Katz Lazăr (lic. Botoşani), *Manolescu I. Nicolea* (lic. Focşani), *Marcovici H.* (Botosani), *Marcovici Mauriciu* (lic. Botoşani), *Moroianu I. At.* (lic. Constanţa) *Munteanu I Gheorghe* (lic. milit. Craiova), *Niculescu Şt. Emanuel* (lic milit., Craiova), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Popovici Aurel* (Focşani), *Popovici Th. I., Schächter M. Ozias, Stoicescu Teodor* (lic. Internat, Iaşi), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Ţanovici V. C-tin* (lic. Ploeşti) şi *Winkler Alfred* (Semin. Pedag., Iaşi).

480. — *Să se găsească un număr de trei cifre, egal cu cubul cifrei unităţilor şi cu patratul răsturnatului rămas la stânga sa după suprimarea cifrei unităţilor.*

ALEXANDRU PAMULA

Cuburile de trei cifre sunt:

$125 = 5^3$, $216 = 6^3$, $343 = 7^3$, $512 = 8^3$, $729 = 9^3$.

Dintre acestea numai numerile:

125, 216, 729,

sunt egale cu cubul cifrei unităţilor lor, iar dintre acestea numai 729 este pătrat perfect. Să vedem dacă 729, împlineşte şi ultima condiţie. Dacă suprimăm cifra unităţilor, şi inversăm numărul rămas, avem 27 şi observăm că:

$$729 = 27^2.$$

Deci 729 este numărul cerut.

Soluţie dată de d-nii: *Agapescu M. Nicolai* (Semin. Ped. Iaşi), *Akerman Cazimir* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Albeată P. Emil* (lic. Piatra-Neamţ), *Alter — Cogan* (lic. Chişinău), *Aposteanu Ion* (lic. Timişoara), *Ardelea Radu* (lic. milit., Craiova), *Avramescu T. Ioan* (lic. Caracal), *Baciu G. I.* (lic. Focşani), *Bălăşescu N. C-tin* (lic. Tg.-Mureş), *Bârs Petre* (lic. Sibiu), *Beldie D-tru* (R.-Sărat), *Beşchea Nicolae* (lic. Braşov), *Bey M. Gheorghe* (lic. Buzeşti, Craiova), *Braeşter Oto* (lic. Naţional, Iaşi), *Brezeanu P.* (lic. Tg.-Mureş), *Carabeţeanu Gh. Petre* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Caracaş I. Gh.* (lic. Botoşani), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Cercel Şt. C-tin* (lic. Tg.-Mureş), *Ciffer I. Simion* (lic. Giurgiu), *Constantinescu G. Gheorghe* (lic. Craiova), *Cristescu C. Ioan* (lic. Şincai, Bucureşti), *Dărmănescu I.* (lic. Fraţii Buzeşti, Craiova), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focşani), *Diaconu C. Oprea* (lic. milit., Cernăuţi), *Dinescu Florin* (lic. Ploeşti), *Drăgan G. Gheorghe* (lic. Braşov), *Dravătz Ioan* (lic. Ploeşti), *Dumitrescu G. I.* (lic. Caracal), *Duport George* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Feldstein Solomon* (lic. Piteşti), *Florea V. Gheoghe* (lic. Carol, Craiova), *Florescu M. Octavian, Foca Ilie, Frumuşelu H. Gheorghe* (Braşov), *Gataianţu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gavrilescu I. N.* (lic. Ploeşti), *Gheorghiu C-tin* (lic. Piteşti), *Goldenzweig S. Carol L.* (lic. Mihai Viteazul, Bucureşti), *Grozăvescu D-tru* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Grozăvescu Gr. Petre* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Holchiowsky G.* (lic. Caracal), *Ilinţă I. Ion-Dăbuleni* (lic. Caracal), *Ionescu B. Alexandru* (lic. Piteşti), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu C. Nicolae* (lic. Tg.-Mureş), *Iscovici Paul* (lic. Piteşti), *Istinie I. C. Bresuică* (lic. Caracal), *Ivanovici A. Nicolae* (lic. Braşov), *Katz Lazăr* (lic. Botoşani), *Lepădatu Miclea* (lic. Cahul), *Lipcan A.* (Cahul), *Manoil A.* (Roman), *Manolescu I. Nicolae* (lic. Focşani), *Marineanu Traian* (lic. Timişoara), *Marius Mariş, Munteanu Gheorghe* (lic. milit., Craiova), *Neacsu Vasile* (lic. Braşov), *Nedelceanu Emil, Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Nicolau I. C.* (Curtea de Argeş), *Niculescu Şt. Emanuel* (lic. milit., Craiova), *Nicolescu V. Gheorghe* (lic. Focşani), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Panţu Z. I.* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Păun I. C-tin* (lic. Focşani), *Popescu Stelian* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Popescu Virgiliu* (lic. Tg.-Mureş), *Popovici Aurel* (lic. Focşani), *Popovici Th. Theodor* (Şc. Comercială, Bucureşti), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Raiciu V. C-tin* (lic. Caracal), *Romaşcan Ştefan* (lic. Focşani), *Segal Leon* (lic. Botoşani), *Sfinţescu T. Duiliu* (lic. Sp.-Haret, Bucureşti), *Stoica N. Aureliu, Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, Bucureşti), *Tudose C. Tănase* (lic. Câmpina), *Ţanovici V. C-tin* (lic. Ploeşti), *Ţari N. Cheorghe* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Ungureanu D. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Vasilescu Bartolomen* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vlădea Ioan* (lic. Braşov), *Zamfirescu Ioan* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Piteşti).

486. — *Să se stabilească relaţiunea:*

$$\frac{4R}{abc}\sum\frac{r_a r_b (r_a+r_b-r)}{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}} = 8R - r,$$

notaţiile fiind cele obicinuite.

RAPEANU RADU

Folosim relaţiile cunoscute:

$$tg\frac{A}{2}=\frac{r_a}{p},\quad tg\frac{B}{2}=\frac{r_b}{p},\quad tg\frac{C}{2}=\frac{r_c}{p},\quad abc = 4Rs,$$

şi primul membru al relaţiei cerute se poate scri succesiv:

$$(1)\ \frac{4R}{abc}\sum\frac{r_a r_b (r_a+r_b-r)}{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}} =$$

$$\frac{4R}{4Rs}\sum\frac{r_a r_b r_c}{p}(r_a+r_b-r)$$

$$= \frac{r_a r_b r_c}{s.p}\sum(r_a+r_b-r) =$$

$$\frac{r_a r_b r_c}{sp}\left[2(r_a+r_b+r_c)-3r\right]$$

Cum de altă parte sunt cunoscute și relațiile:

$$r_a=\frac{s}{p-a},\quad r_b=\frac{s}{p-b},\quad r_c=\frac{s}{p-c},\quad r=\frac{s}{p}$$

$$r_a+r_b+r_c-r=4R,\qquad s^2=p(p-a)(p-b)(p-c),$$

relația (1) se poate scri încă:

$$\frac{4R}{abc}\sum\frac{r_a r_b(r_a+r_b-r)}{\operatorname{cotg}\frac{C}{2}}=$$

$$\frac{s^3}{sp(p-a)(p-b)(p-c)}(8R-r)=8R-r.$$

Soluții date de d-nii: *Ardelea Radu* (lic. mil., Craiova) *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat). *Beșchea G. Nicolae* (lic. Brașov), *Braeșter Oto* (lic. Național, Iași), *Cozma Z. Gh.* (student), *Dărmănescu I.* (lic. Frații Buzești, Craiova), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Foca Ilie* (Roșiorii de Vede), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Florescu M. Octavian* (lic. Caracal), *Frumușelu H. Gheorghe* (lic. Brașov), *Gataianțu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gradin I. Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara), *Handjief* (Șc. Polit., Timișoara), *Iacob Șt. Eugen* (lic. Botoșani). *Ieremia Petru* (lic. Timișoara), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Iscovici Paul* (Pitești), *Lepădatu Miclea* (lic. Cahul), *Lipcan A.* (lic. Cahul), *Manoil A.* (Roman), *Manolescu I. Niculae* (lic. Focșani), *Mariuș Mariș* (lic. Arad), *Morțun Emil* (lic. Lazăr, București), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Nicolau I. Dobridor* (lic. milit., Craiova), *Nicolescu V. Gheorghe* (lic. Focșani), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Popovici Aurel* (Focșani, *Rădulesccu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Rusanda Gheorghe* (Timișoara), *Segal Leon* (lic. Botoșani), *Stoica N. Aurel, Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Tunaru Traian, Tanovici V. C-tin, Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, București) și *Vlădea Ioan* (lic. Brașov).

PROBLEME PROPUSE

504.* — Să se dovedească că expresiunea:

$$10^{11^n}+1,$$

se divide prin, 11^{n+1}

GH. CONSTANTINESCU

505. — Se cer patratele perfecte de patru cifre, în care ultima cifră, care este un patrat perfect, este egală cu prima cifră, iar dacă scădem cifra a 3-a din a 2-a, căpătăm un patrat perfect.

C N. BALAȘESCU

506.* — Să se construiască un triunghiu dreptunghic, cunoscând suma sau diferența catetelor și suma sau diferența între ipotenuză și una din catete. Să se examineze toate cazurile care se pot prezenta.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

507. — Se dă un cerc O și un triunghiu înscris ABC. Se duce diametrul punctului A și înălțimea AD. Se proectează punctele B și C pe acest diametru în E și F. Se prelungește DE și DF până ce întâlnesc pe AC și AB respectiv în G și H. Să se demonstreze că punctele A, B, G, H sunt conciclice.

DRÂMBA N. C-TIN

508.* — Patru persoane A, B, C și D, își împart un sac cu nuci în felul următor: Prima persoană A aruncă o nucă pentru a-și putea lua a patra parte, un număr întreg de nuci; a doua B procedează la fel cu restul din sac, apoi a treia C cu ceiace rămâne după B și în fine a patra D cu ceia ce rămâne după C. Restul de nuci se împarte exact în patru părți egale, celor patru persoane. Câte nuci au fost în sac?

V. VÂLCOVICI

509.* — Să se stabilească identitatea:

$$C_{2r+1}^{r}-\frac{C_{2r+1}^{r-1}}{3}+\ldots+(-1)^{r-1}\frac{C_{2r+1}^{1}}{2r-1}+$$

$$(-1)^r\frac{1}{2r+1}=2^{2r}\frac{2.\,4.\,6\ldots 2r}{1.\,3.\,5\ldots(2r+1)}$$

V. ALACI

510. — Să se rezolve ecuația:

$$\frac{m^2-1}{2}\sin^2 x+k\sin x\cos x+k\sin x+\cos x+1=0.$$

EMIL STEFĂNESCU

511. — Să se arate că în orice triunghiu există relația:

$$\Sigma a h_a r_a-2(p-c)\Sigma r_a r_b=2ap(c-b).$$

CĂLIN M. GH.

INFORMATIUNI

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare, problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Abonamentul pe anul V-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

60 (ȘASEZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL V. 15 IANUARIE 1926 NO. 11.

REVISTA MATEMATICĂ

DIN

TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 6 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 60 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. V. ALACI. AFLAREA DIRECTA A CATULUI A DOUA POLINOAME
2. NOTE MATEMATICE, 16, 17
3. BIBLIOGRAFIE
4. PROBLEME REZOLVATE: 398 470, 472, 477, 482, 483, 484
5. PROBLEME PROPUSE
6. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat, 60 lei
Anul III, broșat, 60 lei
Anul IV, broșat, 60 lei.

ANUL V. — NO. 11 TIMISOARA, 15 IANUARIE 1926.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 6 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 60 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

AFLAREA DIRECTA A CATULUI A DOUA POLINOAME

de V. ALACI

(urmare)

1. Inainte de a trece mai departe, atragem atenția corespondenților noștri asupra unui articol important din „*Gazeta Matematică*“, No. 4, anul XXVII, a d-lui profesor *Traian Lalescu*, intitulat „*Câtul a două polinoame*“, publicat încă din 1921.

In acest articol se stabilește între altele, *legea de formațiune a câtului unui polinom* $P(x)$ *prin produsul de n factori*, $(x-a)(x-b)\ldots(x-l)$, *deci și prin* $(x-a)^n$, *când* $a=b=\ldots=l$.

A se vedea și interesantul articol al d-lui *Th. Angheluță*: „*O expresiune remarcabilă a câtului și restului a două polinoame. Condiția de divizibilitate a două polinoame oarecare*“. „*Gazeta Matematică*“, anul XXVIII, pag. 201.

2. Folosind o altă metodă, mi-am propus să găsesc direct expresiunea câtului și restului unui polinom $P(x)$ prin $(1-x)^q$ și mai general expresiunea câtului lui $P(x)$ prin produsul $(a-x)^\alpha(b-x)^\beta\ldots(l-x)^\delta$, $\alpha, \beta, \ldots \delta$ fiind întregi pozitivi.

Astfel în No. 8 al „R. M. T.“, 1925, am reușit a găsi direct expresiunea câtului și restului unui polinom:

$$a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m,$$

prin binomul, $(1-x)^q$.

In cazul împărțirei exacte, am găsit.

$$(1)\quad \frac{a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m}{(1-x)^q}=$$

$$A_0+A_1x+\ldots+A_ix^i+\ldots+A_{m-q}x^{m-q},$$

unde:

$$(2)\quad A_i=\sum_{\lambda=0}^{i}a_\lambda\Gamma_q^{i-\lambda},\quad i=0,1,2,\ldots m-q.$$

In cazul împărțirei neexacte, am găsit:

$$(3)\quad \frac{a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m}{(1-x)^q}=(-1)^q(A_0x^{m-q}+A_1x^{m-q-1}+\ldots+A_{m-q})+\frac{C_0+C_1x+\ldots+C_{q-1}x^{q-1}}{(1-x)^q}$$

unde:

$$(4)\quad A_i=\sum_{\lambda=0}^{i}a_{m-\lambda}\Gamma_q^{i-\lambda},\quad i=0,1,2,\ldots m-q$$

$$(5)\quad C_i=a_i-(-1)^{q-i}(C_q^iA_{m-q}-C_q^{i-1}A_{m-q-1}+\ldots\ldots\pm C_q^0A_{m-q-i}).$$

3. In cele ce urmează ne vom ocupa de cazul general menționat, adică vom căuta să găsim formulele care dau direct expresiunea coeficienților câtului și restului unui polinom oarecare,

$$a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m,$$

prin $(a-x)^\alpha(b-x)^\beta\ldots(l-x)^\lambda$, ($\alpha, \beta, \ldots \lambda$ fiind întregi pozitivi). Vom începe prin a trata mai multe cazuri particulare și consecințele ce pot rezulta.

4. *Cazul când polinomul,* $a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m$ *se divide prin* $(a-x)^\alpha$.

Putem deduce acest caz, din acel tratat înainte, când împărțitorul era $(1-x)^q$. In adevăr, dacă în relația (1), înlocuim x prin $\frac{x}{a}$ și q prin α, avem:

$$(6)\quad \frac{a_0+\frac{a_1}{a}x+\ldots+\frac{a_m}{a^m}x^m}{(a-x)^\alpha}=\frac{A_0}{a^\alpha}+\frac{A_1}{a^{\alpha+1}}x+\ldots\ldots+\frac{A_i}{a^{\alpha+i}}x^i+\ldots+\frac{A_{m-\alpha}}{a^m}x^{m-\alpha}$$

unde cum știm:

$$(7) \qquad A_i = \sum_{\lambda=0}^{i} a_\lambda \Gamma_\alpha^{i-\lambda}.$$

Dacă în relațiile (6) și (7) substituim a_i prin $a_i a^i$ și A_i prin $A_i a^{\alpha+i}$, obținem:

$$(8) \quad \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{(a-x)^\alpha} = A_0 + A_1 x + \ldots + A_i x^i + \ldots + A_{m-\alpha} x^{m-\alpha}$$

$$A_i a^{\alpha+i} = \sum_{\lambda=0}^{i} a_\lambda a^\lambda \Gamma_\alpha^{i-\lambda},$$

sau:

$$(9) \quad A_i = \frac{1}{a^{\alpha+i}} \sum_{\lambda=0}^{i} a_\lambda a^\lambda \Gamma_\alpha^{i-\lambda}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots m-\alpha.$$

Cum vedem relațiunea (8) ne dă expresiunea câtului polinomului, $a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, prin $(a-x)^\alpha$, coeficienții câtului fiind dați de relația (9), într'o formă simplă, în funcție de coeficienții deîmpărțitului.

Putem ajunge la aceste rezultate și în mod direct.

In adevăr, dacă notăm:

$$u = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$
$$v = (a-x)^{-\alpha},$$

atunci putem scri:

$$(10) \quad u.v = A_0 + A_1 x + \ldots + A_i x^i + \ldots + A_{m-\alpha} x^{m-\alpha},$$

unde coeficienții A_i trebuesc determinați.

Derivând de i ori ambii membri și luând în urmă $x=0$, obținem ținând seamă de formula lui *Leibnitz*.

$$(11) \quad i!\, A_i = |D^i u.v|_{x=0} = |u v^{(i)} + C_i^1 u' v^{(i-1)} + \ldots + C_i^{i-1} u^{(i-1)} v' + u^{(i)} v|_{x=0}.$$

Dar pentru $x=0$, observăm ușor că:

$$|u|_{x=0} = a_0, \quad |v|_{x=0} = \frac{1}{a^\alpha},$$

$$(12) \quad |u^{(k)}|_{x=0} = k!\, a_k; \quad k = 0, 1, 2, \ldots m;$$

$$|v^{(h)}|_{x=0} = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+h-1)\alpha^{-\alpha-h} = h!\, \Gamma_\alpha^h \frac{1}{a^{\alpha+h}}$$
$$h = 0, 1, 2, \ldots$$

unde Γ_q^p înseamnă numărul combinărilor cu repetiție a q obiecte luate câte p.

In virtutea relațiilor (12), relația (11) devine:

$$i!\, A_i = \frac{a_0}{a^{\alpha+i}} i!\, \Gamma_\alpha^i + C_i^1 \frac{a_1}{a^{\alpha+i-1}} (i-1)!\, \Gamma_\alpha^{i-1} + \ldots$$
$$\ldots + C_i^i \frac{a_i}{a^\alpha} i!\, \Gamma_\alpha^0$$

sau;

$$(13) \qquad i!\, A_i = \sum_{\lambda=0}^{i} C_i^\lambda \frac{a_\lambda}{a^{\alpha+i-\lambda}} \lambda!\, (i-\lambda)!\, \Gamma_\alpha^{i-\lambda}$$

Cum însă:

$$C_i^\lambda \lambda!\, (i-\lambda)! = i!$$

relația (13) simplificată cu $i!$, se poate scri încă:

$$(14) \quad A_i = \frac{1}{a^{\alpha+i}} \sum_{\lambda=0}^{i} a_\lambda a^\lambda \Gamma_\alpha^{i-\lambda}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots m-\alpha,$$

identică cu expresiunea (9) găsită mai sus:

Aplicație. Polinomul:

$$2x^5 - 9x^4 + 5x^3 + 26x^2 - 36x + 8,$$

divizându-se prin $(2-x)^3$, *să se afle direct câtul*

Putem scri:

$$\frac{2x^5 - 9x^4 + 5x^3 + 26x^2 - 36x + 8}{(2-x)^3} =$$
$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2,$$

unde coeficienții A_i $(i=0, 1, 2)$ îi calculăm cu formula (14), avem:

$$A_0 = \frac{1}{a^\alpha} a_0 \Gamma_\alpha^0 = \frac{8}{2^3} = 1, \quad A_1 = \frac{1}{a^{\alpha+1}} (a_0 \Gamma_\alpha^1 + a_1 a \Gamma_\alpha^0)$$
$$= \frac{1}{2^4} (8 \times 3 - 36 \times 2) = -3$$

$$A_2 = \frac{1}{a^{\alpha+2}} (a_0 \Gamma_\alpha^2 + a_1 a \Gamma_\alpha^1 + a_2 a^2 \Gamma_\alpha^0) =$$
$$\frac{1}{2^5} \left(8 \times \frac{3.4}{1.2} - 36 \times 2 \times 3 + 26 \times 4\right) = 2$$

Câtul căutat este astfel:

$$1 - 3x + 2x^2.$$

5. *Aflarea directă a câtului și restului împărțirei unui polinom*:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$

prin $(a-x)^\alpha$,

In adevăr, dacă în relațiunea (3) înlocuim x prin $\frac{x}{a}$ și q prin α, avem:

$$(15)\quad \frac{a_0 + \frac{a_1}{a} x + \ldots + \frac{a_m}{a^m} x^m}{(a-x)^\alpha} = (-1)^\alpha \left(\frac{A_0}{a^m} x^{m-\alpha} + \frac{A_1}{a^{m-1}} x^{m-\alpha-1} + \ldots + \frac{A_{m-\alpha}}{a^\alpha} \right) + \frac{C_0 + \frac{C_1}{a} x + \ldots + \frac{C_{\alpha-1}}{a^{\alpha-1}} x^{\alpha-1}}{(a-x)^\alpha},$$

unde A_i și C_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ sunt dați de relațiile (4) și (5).

Dacă în relația (15) și în relațiile (4) și (5), înlocuim a_i prin $a_i a^i$, A_i prin $A_i a^{m-i}$ și C_i prin $C_i a^i$, obținem:

$$(16)\quad \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{(a-x)^\alpha} = (-1)^\alpha (A_0 x^{m-\alpha} + A_1 x^{m-\alpha-1} + \ldots + A_{m-\alpha}) + \frac{C_0 + C_1 x + \ldots + C_{\alpha-1} x^{\alpha-1}}{(a-x)^\alpha}$$

$$A_i a^{m-i} = \sum_{\lambda=0}^{i} a_{m-\lambda} a^{m-\lambda} \Gamma_\alpha^{i-\lambda}$$

$$C_i a^i = a_i a^i - (-1)^{\alpha-i} \left[C_\alpha^i A_{m-\alpha} a^\alpha - C_\alpha^{i-1} A_{m-\alpha-1} a^{\alpha+1} + \ldots + (-1)^i A_{m-\alpha-i} a^{\alpha+i} \right].$$

Ultimele două relații se mai pot scri:

$$(17)\quad A_i = \frac{1}{a^{m-i}} \sum_{\lambda=0}^{i} a_{m-\lambda} a^{m-\lambda} \Gamma_\alpha^{i-\lambda}$$

$$(18)\quad C_i = a_i - \frac{(-1)^{\alpha-i}}{a^i} \sum_{\lambda=0}^{i} (-1)^\lambda C_\alpha^{i-\lambda} A_{m-\alpha-\lambda} a^{\alpha+\lambda},$$

în care vom lua $A_k = 0$, dacă $k < 0$.

Cum vedem relațiunea (16) cuprinde expresiunea directă a câtului și restului împărțirei polinomului:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m,$$

prin $(a-x)^\alpha$, coeficienții câtului și restului fiind dați într'o formă simplă în funcție de coeficienții împărțitorului, prin formulele (17) și (18).

Observare. Evident că relațiile (18) egalate cu zero. scriu condițiile ca polinomul, $a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, să se dividă prin $(a-x)^m$.

Aceste condiții sunt astfel:

$$a_i = \frac{(-1)^{\alpha-i}}{a^i} \sum_{\lambda=0}^{i} (-1)^\lambda C_\alpha^{i-\lambda} A_{m-\alpha-\lambda} a^{\alpha+\lambda},$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots \alpha - 1,$$

în care $A_{m-\alpha-\lambda}$ sunt dați de relația (17).

Aplicație, Să se afle direct câtul și restul împărțirei polinomului:

$$x^6 - 9x^5 + 20x^4 + 31x^3 - 140x^2 + 30x + 166,$$

prin $(3-x)^4$.

Relațiunea (16) ne permite a scrie:

$$\frac{x^6 - 9x^5 + 20x^4 + 31x^3 - 140x^2 + 30x + 166}{(3-x)^4} = A_0 x^2 + A_1 x + A_2 + \frac{C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3}{(3-x)^4},$$

unde coeficienții A_0, A_1, A_2 îi calculăm cu formula (17), iar C_0, C_1, C_2, C_3, cu formula (18). Astfel avem, observând cu atenție coeficientii:

$$A_0 = \frac{1}{a^m} a_m x^m \Gamma_\alpha^0 = \frac{1}{3^6} 1 . 3^6 . 1 = 1.$$

$$A_1 = \frac{1}{a^{m-1}} (a_m a^m \Gamma_\alpha^1 + a_{m-1} a^{m-1} \Gamma_\alpha^0) = \frac{1}{3^5} (1 . 3^6 . 4 - 9 . 3^5 . 1) = 3.$$

$$A_2 = \frac{1}{a^{m-2}} (a_m a^m \Gamma_\alpha^2 + a_{m-1} a^{m-1} \Gamma_\alpha^1 + a_{m-2} a^{m-2} \Gamma_\alpha^0)$$

$$= \frac{1}{3^4} \left(1 . 3^6 . \frac{4 . 3}{1 . 2} - 9 . 3^5 . 4 + 20 . 3^4 . 1 \right) = 2.$$

Câtul căutat este astfel:

$$x^2 + 3x + 2.$$

Să găsim acum restul, avem:

$$C_0 = a_0 - (-1)^\alpha C_\alpha^0 A_{m-\alpha} a^\alpha = 166 - A_2 . 3^4 =$$

$$166 - 162 = 4$$

$$C_1 = a_1 - \frac{(-1)^{\alpha-1}}{a}(C_\alpha^1 A_{m-\alpha} a^\alpha - C_\alpha^0 A_{m-\alpha-1} a^{\alpha+1})$$

$$= 30 + \frac{1}{3}(4 A_2 . 3^4 - 1 . A_1 . 3^5) = 30 + 3^3(8 - 9) = 3.$$

$$C_2 = a_2 - \frac{(-1)^{\alpha-2}}{a^2}(C_\alpha^2 A_{m-\alpha} a^\alpha - C_\alpha^1 A_{m-\alpha-1} a^{\alpha+1}$$

$$+ C_\alpha^0 A_{m-\alpha-2} a^{\alpha+2}) =$$

$$-140 - \frac{1}{3^2}\left(\frac{4 . 3}{1 . 2} A_2 . 3^4 - 4 . A_1 . 3^5 + A_0 3^6\right) =$$

$$-140 - 9(6 . 2 - 4 . 9 + 9) = -5$$

$$C_3 = a_3 - \frac{(-1)^{\alpha-3}}{a^3}(C_\alpha^3 A^{m-\alpha} a^\alpha - C_\alpha^2 A_{m-\alpha-1} a^{\alpha+1}$$

$$+ C_\alpha^2 A_{m-\alpha-2} a^{\alpha+2} - C_\alpha^0 A_{m-\alpha-3} a^{\alpha+3}) =$$

$$31 + \frac{1}{3^3}\left(\frac{4 . 3 . 2}{1 . 2 . 3} A_2 . 3^4 - \frac{4 . 3}{1 . 2} A_1 3^5 + 4 A_0 3^6\right) =$$

$$31 + 3(4 . 2 - 6 . 9 + 4 . 9) = 1.$$

Restul căutat este astfel:

$$x^3 - 5x^2 + 3x + 4.$$

6. *Cazul când polinomul,* $a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ *se divide prin produsul* $(a - x)^\alpha (b - x)^\beta$.

Dividem întâi polinomul prin primul factor, și avem;

$$(19) \quad \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + A_m x^m}{(a - x)^\alpha} = A_0 + A_1 x + \ldots$$

$$\ldots + A_i x^i + \ldots + A_{m-\alpha} x^{m-\alpha}.$$

Coeficienții A_i, după cele stabilite sunt dați de relația (14), anume:

$$(20) \quad A_i = \frac{1}{a^{\alpha+i}} \sum_{\lambda=0}^{i} a_\lambda a^\lambda \Gamma_\alpha^{i-\lambda}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots m - \alpha$$

Acum dividem câtul aflat:

$$A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-\alpha} x^{m-\alpha},$$

prin $(b - x)^\beta$, și avem:

$$(21) \quad \frac{A_0 + A_1 x + \ldots + A_{m-\alpha} x^{m-\alpha}}{(b - x)^\beta} =$$

$$B_0 + B_1 x + \ldots + B_i x^i + \ldots + B_{m-\alpha-\beta} x^{m-\alpha-\beta},$$

unde în virtutea aceleiași formule (14), avem:

$$(22) \quad B_i = \sum_{\lambda=0}^{i} A_\lambda b^\lambda \Gamma_\beta^{i-\lambda}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots m - \alpha - \beta.$$

Așa dar, vom calcula întâi coeficienții A_i cu ajutorul relației (44) în funcție de a și de coeficienții $a_0, a_1, \ldots a_m \ldots$ ai deîmpărțitului și apoi vom calcula pe B_i cu ajutorul relației (22) în funcție de a, b și de coeficienții $A_0, A_1, \ldots A_{m-\alpha}$. Dar putem exprima pe B_i direct în funcție de a, b și de coeficienții $a_0, a_1, \ldots a_m \ldots$ ai deîmpărțitului, înlocuind în relația (22) pe A_λ prin valoarea sa dată de relația (14), avem astfel:

$$B_i = \frac{1}{b^{\beta+i}} \sum_{\lambda=0}^{i} \frac{1}{a^{\alpha+\lambda}} (a_0 \Gamma_\alpha^\lambda a_1 a \Gamma_\alpha^{\lambda-1} + \ldots$$

$$\ldots + a_\lambda a^\lambda \Gamma_\alpha^0) b^\lambda \Gamma_\beta^{i-\lambda}$$

Putem deci scri:

$$(23) \quad \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m}{(a - x)^\alpha (b - x)^\beta} = B_0 + B_1 x + \ldots$$

$$\ldots + B_i x^i + \ldots + B_{m-\alpha-\beta} x^{m-\alpha-\beta},$$

unde:

$$(24) \quad B_i = \frac{1}{a^{\alpha+i} b^{\beta+i}} \sum_{\lambda=0}^{i} a^{i-\lambda} b^\lambda \Gamma_\beta^{i-\lambda} (a_0 \Gamma_\alpha^\lambda +$$

$$a_1 a \Gamma_\alpha^{\lambda-1} + \ldots + a_\lambda a^\lambda \Gamma_\alpha^0).$$

Coeficienții B_i sunt deci funcțiuni liniare de coeficienții $a_0, a_1, \ldots a_m \ldots$ ai deîmpărțitului.

Vom arăta mai departe, că coeficienții B_i se pot exprima direct în funcție de coeficienții deîmpărțitului și acei ai împărțitorului fără a mai figura de loc rădăcinele a și b ale împărțitorului.

Observare. Evident că am putea efectua împărțirea (23), începând prin a divide întâi pe $a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$ prin $(b - x)^\beta$ și apoi câtul aflat l'am divide prin $(a - x)^\alpha$ și în acest caz am găsi:

$$(25) \quad B_i = \frac{1}{a^{\alpha+i} b^{\beta+i}} \sum_{\lambda=0}^{i} (a^\lambda b^{i-\lambda} \Gamma_\alpha^{i-\lambda} (a_0 \Gamma_\beta^\lambda +$$

$$a_1 b \Gamma_\beta^{\lambda-1} + \ldots + a_\lambda b^\lambda \Gamma_\beta^0).$$

Din comparația relațiilor (24) și (25), rezultă următoarea identitate interesantă:

$$\sum_{\lambda=0}^{i} a^{i-\lambda} b^{\lambda} \Gamma_{\beta}^{i-\lambda} \left(a_0 \Gamma_{\alpha}^{\lambda} + a_1 a \Gamma_{\alpha}^{\lambda-1} + \ldots + a_0 a^{\lambda} \Gamma_{\alpha}^{0}\right) =$$

$$\sum_{\lambda=0}^{i} a^{\lambda} b^{i-\lambda} \Gamma_{\alpha}^{i-\lambda} \left(a_0 \Gamma_{\beta}^{\lambda} a_1 b \Gamma_{\beta}^{\lambda-1} + \ldots + a_{\lambda} b^{\lambda} \Gamma_{\beta}^{0}\right),$$

care se poate verifica și direct:

Aplicație. Polinomul:

$$8 - 20x + 6x^2 + 21x^3 - 18x^4 + 4x^6 - x^7,$$

divizându-se prin produsul:

$$(2 - x)^2 (1 - x)^3,$$

se cere să se afle direct câtul.

Putem scri:

$$\frac{8 - 20x + 6x^2 + 21x^3 - 18x^4 + 4x^6 - x^7}{(2 - x)^2 (1 - x)^3} =$$

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2,$$

unde coeficienții B_i $(i = 0, 1, 2)$ îi calculăm cu formula (24), avem:

$$B_0 = \frac{a_0}{a^{\alpha} b^{\beta}} = \frac{8}{2^2 . 1^3} = 2,$$

$$B_1 = \frac{1}{a^{\alpha+1} b^{\beta+1}} \left[a_0 a \Gamma_{\beta}^{1} \Gamma_{\alpha}^{0} + b \Gamma_{\beta}^{0} \left(a_0 \Gamma_{\alpha}^{1} + a_1 a \Gamma_{\alpha}^{0}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2^3 . 1^4} [8.2.3,1 + 1.1 (8.2 - 20.2.1)] = \frac{48 - 24}{8} = 3$$

$$B_2 = \frac{1}{a^{\alpha+2} b^{\beta+2}} \left[a_0 a^2 \Gamma_{\beta}^{2} . \Gamma_{\alpha}^{0} + a b \Gamma_{\beta}^{1} \left(a_0 \Gamma_{\alpha}^{1} + a_1 a \Gamma_{\alpha}^{0}\right)\right.$$

$$\left. + b^2 \Gamma_{\beta}^{0} \left(a_0 \Gamma_{\alpha}^{2} + a_1 a \Gamma_{\alpha}^{1} + a_2 a^2 \Gamma_{\alpha}^{0}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2^4 . 1^5} [8.4.6.1 + 2.3 (8.2 - 20.2.1) + 1^2 . 1.$$

$$(8.3 - 20.2.2 + 6.2^2.1)] = \frac{192 - 144 - 32}{16} = 1.$$

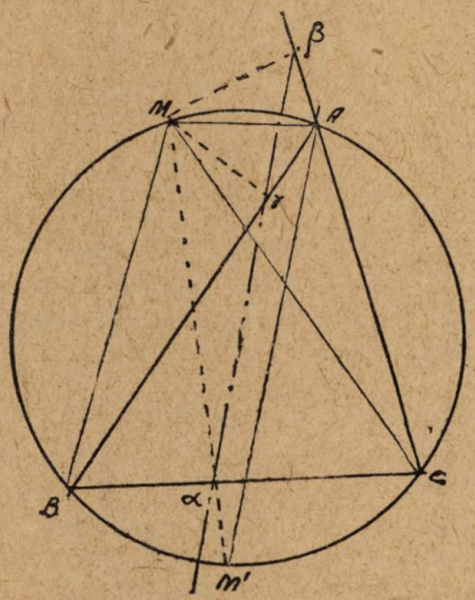
Câtul căutat este astfel:

$$2 + 3x + x^2.$$

(Va urma.)

NOTE MATEMATICE

16. — *Asupra unei proprietăți a dreptei lui Simson.* In R. M. T. an. II, pag. 147, D-l Prof. *Tr. Lalescu* demonstrează că dreapta lui *Simson* a punctului M în raport cu triunghiul A B C este paralelă cu dreapta A M′, M′ fiind intersecția proectantei lui M pe B C cu cercul A B C. Voi demonstra pe alta cale această proprietate.



Pe aceași figură (cu aceleași notațiuni), unim M cu C și vom observa că:

(1) $\overset{\frown}{ACM} = \overset{\frown}{M\alpha\beta}$ pentru că au aceiaș măsură (arcul M β) în cercul circumscris patrulaterului înscriptibil M α C β (căci M α ⊥ α C și M β ⊥ β C); pe de altă parte:

(2) $\overset{\frown}{ACM} = \overset{\frown}{MBA}$ ca având ca măsură arcul M A (arcul cel mic) în cercul circumscris triunghiului A B C.

Din egalitățile (1) și (2) scoatem că:

(3) $$\overset{\frown}{MBA} = \overset{\frown}{M\alpha\beta}.$$

Apoi:

(4) $\overset{\frown}{MBA} = \overset{\frown}{MM'A}$, căci au ca măsură arcul M A (tot cel mic) în cercul A B C.

Din (3) şi (4) scoatem că: $\widehat{MM'A} = \widehat{M\alpha\beta}$ ceeace înseamnă că M'A e paralelă cu $\alpha\beta$.

CONSTANTIN RAUT
absolvent al Liceului din Caracal.

17. — *Cătul a două polinoame.*

Admitem că polinomul $a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, se divide prin $(a - b x)^\alpha$, şi ne propunem a găsi direct cătul.

Notăm:

$$u = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

$$v = (a - b x)^{-\alpha} \qquad \alpha > 0 \text{ şi întreg.}$$

Atunci putem scri:

$$(1) \quad u \,.\, v = A_0 + A_1 x + \ldots + A_i x^i + \ldots + A_{m-\alpha} x^{m-\alpha},$$

unde coeficienţii A_i trebuesc determinaţi.

Derivând de i ori ambii membri ai relaţiei (1) şi luând în urmă $x = 0$, obţinem ţinând seamă de formula lui *Leibnitz*:

$$(2) \quad i!\, A_i = |\, D^i u \,.\, v \,|_{x=0} = |\, u\, v^{(i)} + C_i^1 u'\, v^{(i-1)} + \ldots$$

$$\ldots + C_i^{i-1} u^{(i-1)} v' + u^{(i)} v \,|_{x=0}.$$

Dar pentru $x = 0$, observăm uşor că:

$$|\, u \,|_{x=0} = a_0, \qquad |\, v \,|_{x=0} = \frac{1}{a^\alpha},$$

$$(3) \quad |\, u^{(k)} \,|_{x=0} = k!\, a_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots m,$$

$$|\, v^{(h)} \,|_{x=0} = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+h-1)\, a^{-\alpha-h} b^h =$$

$$h!\, \Gamma_\alpha^h \, \frac{b^h}{a^{\alpha+h}},$$

unde Γ_q^p înseamnă numărul combinărilor cu repetiţie a q obiecte luate câte p.

In virtutea relaţiilor (3), relaţia (2) devine:

$$i!\, A_i = \frac{a_0 b^i}{a^{\alpha+1}} i!\, \Gamma_\alpha^i + C_i^1 \frac{a_1 b^{i-1}}{a^{\alpha+i-1}} (i-1)!\, \Gamma_\alpha^{i-1} + \ldots$$

$$\ldots + C_i^i \frac{a_i}{a^\alpha} i!\, \Gamma_\alpha^0,$$

sau:

$$(4) \quad i!\, A_i = \sum_{\lambda=0}^{i} C_i^\lambda \frac{a_\lambda\, b^{i-\lambda}}{a^{\alpha+i-\lambda}} \lambda!\, (i-\lambda)!\, \Gamma_\alpha^{i-\lambda}.$$

Cum însă:

$$C_i^\lambda \lambda!\, (i-\lambda)! = i!,$$

relaţia (4) se poate simplica cu $i!$ şi ne dă:

$$(5) \quad A_i = \frac{1}{a^{\alpha+i}} \sum_{\lambda=0}^{i} a_\lambda\, a^\lambda\, b^{i-\lambda}\, \Gamma_\alpha^{i-\lambda}.$$

Aplicaţie. Polinomul:

$$54 - 63 x^2 - 34 x^3 + 76 x^4 - 24 x^5,$$

divizându-se prin, $(3 - 2x)^3$, să se afle direct cătul,

Putem scri:

$$\frac{54 - 63x^2 - 34x^3 + 76x^4 - 24x^5}{(3-2x)^3} = A_0 + A_1 x + A_2 x^2,$$

unde coeficienţii. $A_i\,(i = 0, 1, 2)$ îi calculăm cu formula (5), avem:

$$A_0 = \frac{a_0}{a^\alpha} = \frac{54}{3^3} = 2,$$

$$A_1 = \frac{1}{a^{\alpha+1}} (a_0 b\, \Gamma_\alpha^1 + a_1 a\, \Gamma_\alpha^0) = \frac{54 \,.\, 2 \,.\, 3 - 0 \,.\, 3 \,.\, 1}{3^4} = 4,$$

$$A_2 = \frac{1}{a^{\alpha+2}} (a_0 b^2\, \Gamma_\alpha^2 + a_1\, a\, b\, \Gamma_\alpha^1 + a_2\, a^2\, \Gamma_\alpha^0) =$$

$$\frac{54 \,.\, 2^2 \,.\, 6 + 0 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 3 - 63 \,.\, 3^2}{3^5} = \frac{3^4 (16 - 7)}{3^5} = 3.$$

Cătul căutat este astfel:

$$2 + 4x + 3x^2.$$

V. ALACI

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXI, Nr. 4, Decembrie 1925. Aritmetica şi Algebra lui *Gh. Manu*, de Locot.-Col. *Gh. Buicliu*. Asezarea în ordine naturală a rădăcinelor a două ecuaţii de gradul al treilea, de *Th. Angheluţă*.

2. *Foia Matematică*, anul II Nr. 12, Decembrie 1925. Paranteze de ordine superioare, de *B. Ig. Baidaff*.

3. *Curierul Matematic*, vol I, Nr. 10, Decembrie 1925. Proprietăţi în legătură cu triunghiurile pedale (urmare), de *O Bolgiu*.

4. *Revista Matematică Bârlădeană*, Anul I. Nr. 1 Ianuarie 1926. Cuvânt înainte. Membrii (Comitetul). Proprietatea câtorva triunghiuri. Urăm rodnică activitate şi viaţă lungă, Revistei Matematice Bârlădene. Abonamentul 80 lei, pentru elevi 65, în străinatate 100. Abonamentele se vor trimete D-lui *Victor Gh. Oprişanu*, strada Dobranici, *Bârlad*.

5. *N. Abramescu.* Formule pentru Geometria triunghiului. Recomandăm călduros corespondenților noștri această broșură interesantă, de unde pot învăța multe cunoștințe folositoare.

6. *N. Abramescu.* Lecțiuni de Geometrie Analitică. Ediția II-a 1925.

7. *N. Abramescu.* și *Gr. Orășanu.* Curs de Aritmetică Rațională. Ediția V 1925.

8. *Al. Manicatide.* Algebră Elementară, revăzută, și adăugită de *N. Abramescu.* Ediția VII 1925.

PROBLEME REZOLVATE

398. — *Să se demonstreze inegalitatea:*

$$\log_e a < a - 1$$

a fiind mai mare ea unitatea.

V. VÂLCOVICI

Soluție dată de D-ra *Beatrix Blasko,* (Lugoj).

Fie

$$A > B > 0.$$

Avem:

$$\frac{A^n - B^n}{A - B} = A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1}.$$

Inlocuind în membrul al doilea odată pe A prin B și altă dată pe B prin A obținem următoarele neegalități:

$$(1) \qquad \frac{A^n - B^n}{A - B} > nB^{n-1}$$

$$(2) \qquad \frac{A^n - B^n}{A - B} < nA^{n-1}$$

Făcând în prima

$$A = 1 + \frac{x}{n}, \quad B = 1, \quad x > 0$$

avem:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - 1 > x.$$

Această relație tinde la limită, pentru n foarte mare, către:

$$e^x - 1 > x,$$

sau:

$$e^x > 1 + x.$$

Aplicând logaritmii în baza e și punând:

$$1 + x = a$$

avem tocmai inegalitatea din enunț.

Pornind din (2) și făcând

$$A = 1, \qquad B = 1 - \frac{x}{n} \qquad (x > 0)$$

obținem, urmând aceiași cale, inegalitatea din enunț pentru $a > 1$.

Au rezolvat problema: D-șoara *Neumann Maria* (studentă, Lugoj), *Beldie N. D-tru* (R.-Sărat), *Bercevici Sigmund* (lic. Pitești), *Berdan C.* (Șc. Polit. București). *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Căldăraru* (București), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Dorneanu Vasile* (lic. Internat, Iași), *Dravătz I.* (lic. Ploești), *Floarea C. Alcxandru* (lic. Internat, Iași), *Frătici I.* (Șc. Polit. Timișoara), *Gavrilescu Ioan* (lic. Ploești), *Gărleșteanu Mihail* (Șc. Polit. Timișoara), *Ghinisecsu I. Gheorghe* (lic. Internat, Iași), *Goldstein N.* (Cetatea-Albă), *Gradin I. Gheorghe* (Șc. Polit. Timișoara), *Ionescu C. Nicolae* (lic. Sf. Sava, București), *Manolescu I. Niculae* (lic. Focșani), *Marcovici H.* (lic. Botoșani), *Mihăilescu A. C.* (lic. Internat, Iași), *Moașa D.* (lic. Brașov), *Nicolau C.* (lic. R.-Sărat), *Pasko Vilhelm* (București), *Popescu Nicu* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Popovici C-tin* (lic. Internat, Iași), *Popovici Th. Ioan* (Șc. Polit. București), *Segârceanu C-tin* (lic. Craiova), *Segârcenu C. Nisolae* (lic. Cantemir, București), *Ștefănescu Emil* (student București), *Stoica I. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Tărăbuță Paul* (lic. Mihai Viteazul, București), *Tăraș Vasile* (Brașov). *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, București), *Tunaru Traian* (lic. Carol, Craiova), *Țanovici V. C-tin* (lic. Ploești), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, București) și *Vlădea Ion* (lic. Brașov).

470. — *Să se stabilească relațiile:*

$$\frac{\alpha r_a + \beta r_b + \gamma r_c - r(\alpha + \beta + \gamma)}{\alpha \sin^2\frac{A}{2} + \beta \sin^2\frac{B}{2} + \gamma \sin^2\frac{C}{2}} = 4R,$$

$$\frac{\alpha^n (r_a - r)^n + \beta^n (r_b - r)^n + \gamma^n (r_c - r)^n}{\alpha^n \sin^{2n}\frac{A}{2} + \beta^n \sin^{2n}\frac{B}{2} + \gamma^n \sin^{2n}\frac{C}{2}} = 4^n R^n,$$

unde α, β, γ *sunt niște numere arbitrare, iar restul notațiilor fiind cele obicinuite.*

EMIL STEFANESCU

1. Din relaţiile cunoscute:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r_a}{p}=\frac{r}{p-a},$$

deducem:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r_a-r}{a},$$

sau:

$$(1)\qquad a=(r_a-r)\cot\frac{A}{2}$$

De altă parte ştim, că:

$$(2)\qquad \frac{a}{\sin A}=2R$$

Din (1) şi (2) deducem:

$$2R=\frac{(r_a-r)\cot\frac{A}{2}}{\sin A}=\frac{(r_a-r)\cos\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.\sin\frac{A}{2}}=\frac{r_a-r}{2\sin^2\frac{A}{2}}$$

* * *

$$\frac{r_a-r}{\sin^2\frac{A}{2}}=4R$$

Analog, avem:

$$\frac{r_b-r}{\sin^2\frac{B}{2}}=4R,\qquad \frac{r_c-r}{\sin^2\frac{C}{2}}=4R.$$

α, β, γ fiind trei numere arbitrare, evident că putem scri:

$$(3)\qquad \frac{\alpha(r_a-r)}{\alpha\sin^2\frac{A}{2}}=\frac{\beta(r_b-r)}{\beta\sin^2\frac{B}{2}}=\frac{\gamma(r_c-r)}{\gamma\sin^2\frac{C}{2}}=4R$$

O proprietate bine cunoscută de la proporţii, ne permite a scri:

$$\frac{\alpha(r_a-r)+\beta(r_b-r)+\gamma(r_c-r)}{\alpha\sin^2\frac{A}{2}+\beta\sin^2\frac{B}{2}+\gamma\sin^2\frac{C}{2}}=4R,$$

sau:

$$\frac{\alpha r_a+\beta r_b+\gamma r_c-r(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\sin^2\frac{A}{2}+\beta\sin^2\frac{B}{2}+\gamma\sin^2\frac{C}{2}}=4R,$$

Prima relaţie cerută este astfel stabilită.

2. Pentru a stabili relaţia doua ridicăm la puterea n^a sirul de rapoarte (3) şi avem:

$$\frac{\alpha^n(r_a-r)^n}{\alpha^n\sin^{2n}\frac{A}{2}}=\frac{\beta^n(r_b-r)^n}{\beta^n\sin^{2n}\frac{B}{2}}=\frac{\gamma^n(r_c-r)^n}{\gamma^n\sin^{2n}\frac{C}{2}}=4^nR^n$$

Aceiaşi proprietate a proporţiilor, aplicată mai sus, ne dă:

$$\frac{\alpha^n(r_a-r)^n+\beta^n(r_b-r)+\gamma^n(r_c-r)}{\alpha^n\sin^{2n}\frac{A}{2}+\beta^n\sin^{2n}\frac{B}{2}+\gamma^n\sin^{2n}\frac{C}{2}}=4^nR^n$$

Soluţii date de d-nii: *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bernardis B.* (Şc. Polit. Timişoara), *Beşchea G. Nicolae* (lic. Braşov), *Caracaş I. Gh.* (lic. Botoşani), *Cozma Z. Gh.* (student), *Daraban N. Paul* (Şc. Polit. Timişoara), *Deoanca Nicolae* (Şc. Polit. Timişoara), *Dinescu Florin* (lic. Ploeşti), *Dravătz Ioan* (lic- Ploieşti), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Foca Ilie, Frumuşelu H. Gheorghe* (lic. Braşov), *Gabrielescu Vasile* (lic. Brăila), *Gradin I. Gheorghe* (Şc. Polit. Timişoara), *Handjieff V.* (Şc. Polit. Timişoara), *Ianculescu Octavian* (Sc. Milit. de Pilotaj, Tecuci), *Ieremia Petru* (Şc. Polit. Timişoara), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, Bucureşti), *Ionescu Stclian* (lic. Fr. Buzeşti, Craiova), *Lepădatu I. Miclea* (lic. Cahul), *Lepădatu I. Victor* (lic. Internat, Iaşi), *Manolescu I. Niculae* (lic. Focşani), *Marcovici H.* (lic. Botoşani), *Mareş Grigore* (lic. Bacău), *Marius Mariş* (lic. Arad), *Mihăilescu St. Niculae* (lic. Matei Basarab, Bucureşti), *Morţun Emil* (lic. Lazăr, Bucureşti), *Munteanu Gheorghe* (lic. Militar, Craiova), *Neumann Maria* (studentă, Lugoj), *Nicolau G. C-tin* (lic. R.-Sărat), *Nicolescu Emil* (lic. Ploeşti), *Novacu A. Valeriu* (lic. Arad), *Pâslaru I. Niculae* (lic. R.-Sărat), *Podariu Al.* (lic. Piatra-Neamţ), *Pop Iulian* (Şc. Polit. Timişoara), *Popovici Aurel* (lic. Focşani), *Popovici Th. Ioan, Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iaşi), *Rusanda Gheorghe* (lic. Arad), *Schächter M. Ozias* (Moineşti), *Simionov Kindin* (lic. Tulcea), *Spacu G. Petru* (Şc, Polit. Timişoara), *Tăraş Vasile* (lic. Braşov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, Bucureşti), *Tunaru N. Traian* (lic. Craiova), *Ţanovici V. C-tin* (lic. Ploeşti), *Ulţea Titus* (lic. Internat, Iaşi), *Vasilescu P.* (lic. Sf. Sava, Bucureşti), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Timişoara), *Vulpanovici Boris* (ic. Chişinău) şi *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag. Iaşi).

472. — *Se cere patratul perfect de cinci cifre, astfel ca prima cifră să fie rădăcina cubică a numărului format de cifra doua şi a treia, iar suma ultimelor două cifre să fie egală cu o treia.*

ILIUTA I. DABULENI

Fie $a\,b\,c\,d\,e$ patratul perfect de cinci cifre, cerut Din enunț, avem:

(1) $a = \sqrt[3]{b\,c}$, (2) $c = d + e$

Din (1) rezultă $a^3 = b\,c$, adică $b\,c$ e cub perfect de cel mult două cifre; este prin urmare; 01, 08, 27, 64 și deci a este respectiv 1, 2, 3, 4. Numărul căutat este deci de forma:

(3) $101\,d\,e$. $208\,d\,e$, $327\,d\,e$, $464\,d\,e$.

Pe de altă parte, ultimele două cifre ale unui patrat perfect sunt, (C de P. pag. 101): 00, 25, 01, 09, 21, 29, 41, 49, 61, 69, 81, 89, 04, 16, 24, 36, 44, 56, 64, 76, 84, 96, iar dintre acestea numai:

25, 01, 61, 04, 16, 44

satisfac, condiția (2), în virtutea căreia numerile (3) devin:

10101, 20844, 32725, 32761, 32716, 46404.

La prima vedere trebue să lăsam la o parte pe 10101, care se divide cu 3, dar nu cu 9, iar dintre celelalte constatăm că numai 32761 este patrat perfect, deci:

$$a\,b\,c\,d\,e = 32761 = 181^2,$$

care formează singura soluția a problemei:

Soluții date de d-nii: *Agapescu M. Nicolai* (Semin. Pedag., Iași), *Akerman Cazimir* (lic. Gh. Lazăr, București), *Alter-Cogan* (lic. Chișinău), *Aposteanu G. Ion* (lic. Timișoara), *Ardelea Radu* (lic. milit., Craiova), *Avramescu T. Ion* (lic. Caracal), *Baciu G. T.* (lic. Focșani), *Bădescu Aurelian* (lic. Sf. Sava, București), *Bălăsescu N. C-tin* (lic. Tg.-Mureș), *Bârs Petre* (lic. Sibiu), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Beșchea G. Nicolae* (lic. Brașov), *Bey M. Gheorghe* (lic. Craiova), *Brezeanu P.* (lic. Tg.-Mureș), *Carabeteanu Gh.* (lic. Lazăr, București), *Caracaș I. Gh.* (lic. Botoșani), *Călin M. Gh.* (lic. Cararal), *Câlniceanu Gh.* (lic. Tg.-Jiu), *Constantinescu Gh. Gh.* (lic. Carol, Craiova), *Constantinidi Radu* (Șc. Navală, Constanța), *Cristescu C. Ioan* (lic. Șincai, București), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Dăscălescu Hristache* (lic. Focșani), *Dină M. Nicolae* (lic. Caracal), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Dravătz Ioan* (lic. Caracal), *Drăgan G. Gheorghe* (lic. Brașov), *Dumitrescu Gh. Ioan* (lic. Caracal), *Duport George* (lic. Sf. Sava, București), *Feldstein M. Solomon* (lic. Pitești), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Foca Ilie, Fränkel Felix* (lic. Lazăr, București), *Frumușelu H. Gheorghe* (Brașov), *Gavrilescu N. I.* (lic. Pitești), *Gataianțu V. Barbu* (lic. Caracal), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Pitești), *Goldenzweig S. C. Leopold* (lic. Cantemir, București), *Grofșoreanu I. Gheorghe* (Comlos), *Grubenmann I. Grigore* (lic. Cantemir, București), *Halchiowsky G.* (Caracal), *Iacol St. Eugen* (Botoșani), *Iliovici C-tin* (lic. Ploești), *Ionescu B. Alexandru* (lic. Pitești), *Ionescu Angelo* (Șc. Polit., Timișoara), *Ionescu Th. Andei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Iuliu* (lic. Giurgiu), *Ionescu C. Nicolae* (lic. Tg.-Mureș), *Ionescu Gh. Stelian* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Isăcescu C. C-tin* (lic. Tg.-Jiu), *Istinie I. C. Brezuica* (lic. Caracal), *Katz Lazăr* (lic. Botoșani), *Lepădatu I. Miclea* (lic. Cahul), *Lăzărescu I. Ion* (lic. Sf. Sava, Bucuresti), *Manoil A.* (Roman), *Manolescu I. Niculae* (lic. Focșani), *Marcovici M. Mauriciu* (lic. Botoșani), *Moașa V.* (București), *Moroianu I. Al.* (lic. Constanța), *Munteanu Gheorghe* (lic. milit., Craiova), *Neacșu Vasile* (lic, Brașov), *Neștor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Neumann Maria* (studentă, Lugoj), *Nicolau C.* (R.-Sărat), *Nicolau I. C.* (Curtea de Argeș), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Panțu Z. I.* (lic. Lazăr, București), *Patron N. Nicolae* (lic. milit., Iași), *Pâslaru I. Nicolae* (lic. R.-Sărat) *Păun I. C-tin* (lic. Focșani), *Petrescu St. Alexandru* (lic. milit., Craiova), *Podoriu Al.* (lic. Piatra-Neamț), *Pop Iulian* (Șc. Polit., Timișoara), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popovici Aurel, Popovici Dili* (Piatra-Neamț), *Popovici Th. I., Raiciu V. C-tin* (lic. Caracal), *Rădulescu C. Mihail* (iic. R.-Sărat), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Roman I. Ioan* (lic. Mihai Viteazul, București), *Romașcan Ștefan* (lic. Focșani), *Rusanda Gheorghe* (Arad), *Samoila D-tru* (Telega), *Schor A. Oscar* (Semin Pedag., București), *Segârceanu D. C-tin* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Stânciulescu Dan* (lic. M-rea Dealu). *Stoica N. Aureliu, Stoicescu Theodor* (lic. Brăila), *Surugiu · Vasile* (lic. M-rea Dealu), *Tudose C. Tănase* (lic. Câmpina), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Theodorescu C. C.* (lic. Tg.-Mureș), *Tanovici V. C-tin, Țari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, București), *Ungureanu D. Gheorghe* (lic. Câmpina), *Vasilescu B.* (lic. Sf. Sava, București), *Vasiliev Ilie* (lic. Tulcea), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov), *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag., Iași), *Zamfir D. Ilie* (lic. Caracal), *Zamfirescu Ioan* (lic. Fr. Buzești, Craiova) și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Pitești).

Au trimes în ultimul timp soluții, d-nii: *Ionescu Gabriel Radu* (lic. Mihai Viteazul, București) și *Purdilă C.* (lic. Brașov).

477. — *Să se stabilească identitatea:*

$$\frac{6\sin 2t + 2\sin 4t - 2\sin 6t - \sin 8t}{4} = \frac{\sin^5 2t}{\sin^2 t}$$

V. ALACI

Observăm că putem scri:

(1) $6\sin 2t - 2\sin 6t = 4\sin 2t - 2(\sin 6t - \sin 2t)$
$= 4\sin 2t - 4\sin 2t\cos 4t = 4\sin 2t\,(1 - \cos 4t)$
$= 8\sin^3 2t$

(2) $$2\sin 4t - \sin 8t = 2\sin 4t\,(1-\cos 4t) = 4\sin 4t\sin^2 2t = 8\sin^3 2t\cos 2t.$$

Adunând relațiile (1) și (2) și împărțind cu 4, putem scri succesiv:

$$\frac{6\sin 2t + 2\sin 4t - 2\sin 6t - \sin 8t}{4} =$$

$$2\sin^3 2t(1+\cos 2t) = 4\sin^3 2t\cos^2 t =$$

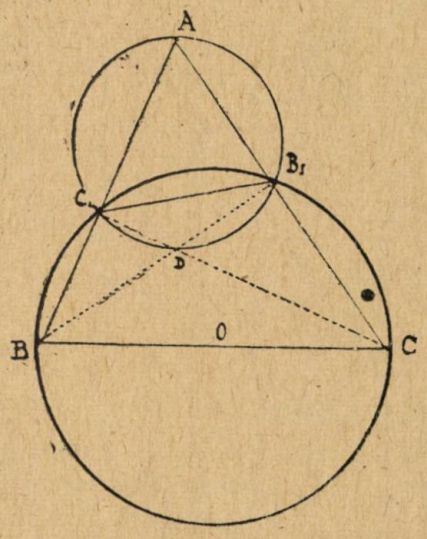
$$\frac{4\sin^3 2t\sin^2 t\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\sin^5 2t}{\sin^2 t}$$

care este tocmai identitatea cerută.

Soluții date de d-nii: *Beju Traian* (Arad), *Beldie N. D-tru* (lic. R.-Sărat), *Ciufu Petre* (lic. R.-Sărat), *Dânga S. Vlad* (Orheiu), *Deoanca Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Diaconescu V. Teodor* (lic. Caracal), *Duport George* (lic. Sf. Sava, București), *Gherbanovscki F. Nicolae* (Orheiu), *Handjieff V.* (Șc. Polit., Timișoara), *Iacob Șt. Eugen* (Botoșani), *Ieremia Petru* (lic. Timișoara), *Iliovici C-tin* (lic. Ploești), *Iscovici Paul* (Pitești), *Manolescu I. Niculae* (lic. Focșani), *Morțun Emil* (lic. Lazăr, București), *Nicolau C.* (R.-Sărat), *Nicolescu V. Gheorghe* (lic. Focșani), *Pop Iulian* (Cluj), *Popovici Th. Ioan* (student), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Schächter M. Oziaș, Simionov Kindin* (lic. Tulcea), *Stoica D.* R.-Sărat), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Tunaru Traian* (lic. Carol, Craiova), *Tanovici V. C-tin, Vasilescu B.* (lic. Sf. Sava, București), *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag. Iași).

482*. — *Un triunghiu* A B C, *are fixe punctele* B_1 *și* C_1 *picioarele înălțimelor cari pleacă din* B *și* C, *iar dreapta* B C *este constantă în lungime. Să se afle locul geometric al vârfurilor* A, B *și* C.

GH. CONSTANTINESCU



Fiindcă $\sphericalangle B B_1 C = \sphericalangle C C_1 B = 90^0$, urmează că patrulaterul $B C B_1 C_1$ este inscriptibil într'un cerc O, al cărui diametru este tocmai B C. Cum $O B_2 = O C_1 = \frac{B C}{2}$, înseamnă că centrul O este fix, el găsindu-se la intersecția cercurilor descrise din B_1 și C_1 cu $\frac{B C}{2}$ cu rază. Locul punctelor B și C este astfel cercul O.

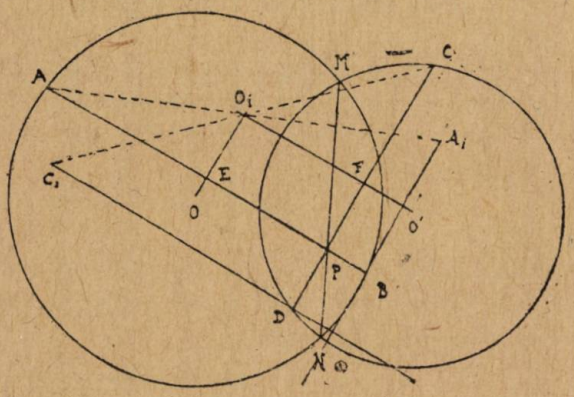
Apoi $\sphericalangle B C C_1$ fiind constant, ca având drept măsura $\frac{\overset{\frown}{C_1 B_1}}{2}$, rezultă că $\sphericalangle$ A complimentul $\overset{\frown}{B_1 C C_1}$ este constant și fiindcă B_1 și C_1 sunt fixe, înseamnă că locul punctului C este arcul de cerc descris pe $C_1 B_1$, capabil de $\sphericalangle$ A.

Evident că și simetricul cercului O și a arcului $C_1 A B_1$ față de $C_1 B_1$ sunt locuri geometrice respectiv ale lui B, C și A.

Soluții dat de d-nii: *Agapescu M. Nicolai* (Sem. Pedag. Iași), *Ardelea Radu* (lic. Milit. Craiova), *Beldie D-tru* (lic. R.-Sărat), *Bey M. Gheorghe* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Braeșter Otto* (lic. Național, Iași), *Cernes A. M.* (lic. Național, Iași), *Ciomofoiu H., Cristescu C. Ioan* (lic. Șincai, București), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Dravătz Ioan* (lic. Ploești), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Pitești), *Ieremia Petru* (lic. Timișoara), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Iscovici Paul* (lic. Pitești), *Manolescu I. Niculae* (lic, Focșani), *Munteanu I. Gheorghe* (lic. Milit. Craiova), *Nedelceanu Emil* (lic. Matei Basarab, București), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Niculescu Emanuel* (lic. Milit. Craiova), *Popescu Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popovici A.* (student), *Popovici Th. Theodor* (Șc. Comercială, București). *Răducan Georgescu* (lic. Lazăr, București), *Segal Leon* (lic. Botoșani), *Sobel I. Mircea* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, București), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov) și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. Pitești).

483. — *Două cercuri* O *și* O′ *se taie în* M *și* N. *Printr'un punct* P *de pe* M N *se duc două coarde perpendiculare* A B *în cercul* O *și* C D *în* O′. *Perpendicularele duse din* O *și* O′ *respectiv pe* A B *și* C D *se taie în* O_1. *Fie* A_1 *și* C_1 *simetricele lui* A *și* C *în raport cu* O_1. *Să se demonstreze că dreptele* $A_1 B$ *și* $C_1 D$ *sunt perpendiculare.*

EMIL STEFĂNESCU



1) Fie O_1 intersecția perpendicularelor duse din O și O' respectiv pe AB și CD. OO_1 fiind perpendiculară pe coarda AB și trecând prin centrul O, o împarte în părți egale, astfel că $AO_1 = BO_1 = A_1O_1$, A_1 fiind simetricul lui A în raport cu O_1. Rezultă că un cerc cu centru în O și cu O_1B ca rază, trece prin punctele A, B, A_1 și deci $\sphericalangle ABA_1 = 90^0$, ca fiind înscris într'un semicerc; AB este prin urmare perpendiculară pe A_1B. Analog dovedim ca C_1D este perpendiculară pe CD, deci și pe A_1B, deoarece CD și A_1B sunt paralele, ca fiind ambele perpediculare pe AB, prima prin ipoteză și a doua pentru că am dovedit mai înainte. A_1B și C_1D sunt deci perpendiculare.

Soluții date de d-nii: *Agapescu M. Nicolae* (Semin. Pedag. Iași), *Albeață N. Ermil* (lic. Piatra-Neamț), *Aposteanu Ion* (lic. Timișoara), *Ardelea Radu* (lic. Milit. Craiova), *Beschea G. Nicolae* (lic. Brașov), *Bey M. Gheorghe* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Braeșter Otto* (lic. Național, Iași), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Cernes A. M.* (lic. Natinal, Iași), *Constantinescu G. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Cristescu C. Ioan* (lic. Șincai, București), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Deoanca Nicolae* (Șc. Polit., Timișoara), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Dravătz Ioan* (lic. Ploești), *Feldstein M. Solomon* (lic. Pitești), *Fränkel Felix* (lic. Lazăr, București), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Pitești), *Grofșoreanu I. Gheorghe Handjeff V.* (Șc. Polit. Timișoara), *Ieremia Petru* (lic. Timișoara), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Gh. Stelian* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Iscovici Paul* (lic. Pitești), *Manolescu I. Niculae* (lic. Focșani), *Marius Mariș* (lic. Arad), *Munteanu Gheorghe* (lic. Milit. Craiova), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Nicolescu V. Gheorghe* (lic. Focșani), *Niculescu St. Emanuel* (lic. Milit. Craiova), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pâslaru I. Nicolae* (lic. R.-Sărat), *Popa Iulian* (lic. Făgăraș), *Popper Ervin* (lic. Timișoara), *Popovici Aurel* (Focșani), *Popovici Th. Theodor* (Șc. Comercială, București). *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Rucăreanu Nicolae* (lic. Brașov), *Segal Leon* (lic. Botoșani), *Segărceanu D. C-tin* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Simionov Kindin* (lic. Tulcea), *Sobel I. Mircea* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Stoica N. Aureliu, Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timișoara), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava, București), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov) și *Zamfirescu Gh. Ioan* (lic. (Pitești).

484*. — *Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinele ecuației:*

$$x^3 + px + q = 0,$$

să se formeze ecuațiile care au ca rădăcini:

$$x_1^2 + x_2x_3, \quad x_2^2 + x_1x_3, \quad x_3^2 + x_1x_2$$

$$x_1^2 - x_2x_3, \quad x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2, \quad x_3^2 - x_1x_2$$

I. DUMITRIU-ARAD

Se cunosc relațiile între rădăcinile și coeficienții unei ecuații, astfel avem:

$$(1) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = p, \quad x_1x_2x_3 = -q.$$

Acum dacă X_1, X_2, X_3 sunt rădăcinele primei ecuații cerute, putem scri ținând seamă de enunț și de relațiele (1).

$$(2) \quad \Sigma X_1 = \Sigma x_1^2 + \Sigma x_1x_2 = (\Sigma x_1)^2 - \Sigma x_1x_2 = -p$$

$$\Sigma X_1X_2 = \Sigma x_1^2x_2^2 + \Sigma x_1^3x_3 + \Sigma x_2^3x_3 + x_1x_2x_3\Sigma x_1$$

Dar:

$$\Sigma x_1^2x_2^2 = (\Sigma x_1x_2)^2 - 2x_1x_2x_3\Sigma x_1 = p^2$$

$$\Sigma x_1^3x_3 = -\Sigma x_1^2x_3(x_2 + x_3) =$$

$$-x_1x_2x_3\Sigma x_1 - \Sigma x_1^2x_2^2 = -p^2$$

$$\Sigma x_2^3x_3 = -\Sigma x_2^2x_3(x_1 + x_3) =$$

$$-x_1x_2x_3\Sigma x_1 - \Sigma x_2^2x_3^2 = -p^2,$$

și deci:

$$(3) \quad \Sigma X_1X_2 = -p^2$$

De asemenea avem:

$$(4) \quad X_1X_2X_3 = (x_1^2 + x_2x_3)(x_2^2 + x_3x_1)(x_3^2 + x_1x_2) =$$

$$2x_1^2x_2^2x_3^2 + (x_1^3x_2^3 + x_2^3x_3^3 + x_3^3x_1^3) +$$

$$x_1x_2x_3(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = 2q^2 +$$

$$(\Sigma x_1x_2)^3 - 3x_1x_2x_3(x_1 + x_2)(x_2 + x_3)(x_3 + x_1) +$$

$$3x_1^2x_2^2x_3^2 = 2q^2 + p^3 + 3x_1^2x_2^2x_3^2 + 3x_1^2x_2^2x_3^2 = p^3 + 8q^2$$

Relațiile (2), (3) și (4) scriind suma rădăcinelor ecuației cerute, suma produselor lor luate câte două și produsul lor, rezultă că ecuația cerută este.

$$X^3 + pX^2 - p^2X - (p^3 + 8q^2) = 0$$

2. Să formăm acum a doua ecuație cerută, ale cărei rădăcini sunt:

$$x_1^2 - x_2x_3, \quad x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2, \quad x_3^2 - x_1x_2.$$

Din prima din relațiile (1) deducem:

$$x_1 = -x_2 - x_3, \quad x_2 = -x_1 - x_3, \quad x_3 = -x_1 - x_2$$

Inmulțindu-le respectiv cu x_1, x_2, x_3, avem:

$$x_1^2 = -x_1x_2 - x_1x_3, \quad x_2^2 = -x_1x_2 - x_2x_3,$$

$$x_3^2 = -x_1x_3 - x_2x_3,$$

sau:

$$x_1^2 - x_2x_3 = -x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3 = -p,$$

$$x_2^2 - x_1x_3 = -p, \quad x_3^2 - x_1x_2 = -p$$

Deci:

$$x_1^2 - x_2x_3 = x_2^2 - x_1x_3 = x_3 - x_1x_2 = -p$$

De altă parte:

$$x_1^2 = x_2^2 + x_3^2 + 2x_2x_3,$$

sau:

$$x_1^2 - x_2x_3 = x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$$

Așa dar:

$$x_1^2 - x_2x_3 = x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 = x_3^2 - x_1x_2 = -p,$$

adică cele trei rădăcini ale ecuației căutate sunt egale între ele și egale cu $-p$. Ecuația căutată este deci:

$$(x+p)^3 = x^3 + 3px^2 + 3p^2x + p^3 = 0.$$

Soluții date de d-nii: *Agapescu Nicolae* (Semin. Pedag. Iași), *Ardelea Radu* (lic. mil., Craiova), *Beșchea G. Nicolae* (lic. Brașov), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Braester O.* (lic. Național, Iași), *Călin M. Gh.* (lic. Caracal), *Cernes A. M.* (lic. Național, Iași), *Ciomofoiu Horia* (lic. Sibiu), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Duport George* (lic. Sf. Sava, București), *Foca Ilie* (Roșiorii-de-Vede), *Gradin I. Gheorghe* (Șc. Polit., Timișoara) *Grofșorean I. Gheorghe, Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București). *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Iscovici Paul* (Pitești), *Lepădatu Miclea* (lic. Cahul), *Manoil A. Roman, Manolescu I. Nicolae* (Focșani), *Marius Mariș* (lic. Arad), *Munteanu Gheorghe* (lic. milit., Craiova), *Nicolau C.* (R.-Sărat), *Niculescu St. Emanuel* (lic. milit., Craiova), *Novacu A. C. Valeriu* (lic. Arad), *Podariu Alexandru* (lic. Piatra-Neamț), *Popovici Aurel* (student), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Segal I. Leon* (lic. Botoșani), *Segărceanu D. C-tin* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Stoica N. Aureliu, Țăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru-Haret, București), *Țanovici V. C-tin* (lic. Ploești), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava), București), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timișoara), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov) și *Winkler Alfrea* (Semin. Pedag. Iași).

PROBLEME PROPUSE

512. — Să se găsească cea mai generală valoare a numărului întreg N, știind că sumele $337N + 243$, $273N + 51$, $225N - 93$ și $189N - 201$ sunt simultan divizibile prin 2^{10}.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

513. — Să se arate că numerile de forma $999\ldots96000\ldots04$ unde avem același număr de 9 și 0, sunt patrate perfecte.

GH. CONSTANTINESCU

514. — Se dă un triunghiu ABC și $A_1B_1C_1$ triunghiul său ortic. Triunghiul format de paralele duse prin mijloacele laturilor A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1, respectiv la AB, BC, CA este egal cu complimentarul lui ABC.

CONSTANTIN TH. IONESCU BUJOR

515. — Se consideră un patrulater înscriptibil $ABCD$. Vârful A este fix, vârfurile B și C descriu respectiv două drepte trecând prin A, iar diagonala BD trece printr'un punct fix E. Dacă unghiul ACB este constant, să se arate că dreapta CD trece printr'un punct fix.

N. G. BOTEA

516. — Să se verifice identitatea:

$$\sum_{\lambda=0}^{i} a^{i-\lambda} b^{\lambda} \Gamma_\beta^{i-\lambda} (a_0 \Gamma_\alpha^{\lambda} + a_1 a \Gamma_\alpha^{\lambda-1} + \ldots$$

$$\ldots + a_\lambda a^\lambda \Gamma_\alpha^0) = \sum_{\lambda=0}^{i} a^\lambda b^{i-\lambda} \Gamma_\alpha^{i-\lambda} (a_0 \Gamma_\beta^{\lambda} +$$

$$a_1 b \Gamma_\beta^{\lambda-1} + \ldots + a_\lambda b^\lambda \Gamma_\beta^0),$$

unde a, b, a_0, a_1, a_2, $\ldots a_i$ sunt numere arbitrare, iar Γ_q^p înseamnă numărul combinărilor cu repetiție a q obiecte luate câte p.

V. ALACI

517. — Să se afle convergența și suma seriei cu termenul general:

$$u_n = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)(n+3)a^n}{1.2.3\ (b+c)^{n+3}}.$$

RAPEANU N. VIRGIL

INFORMATIUNI

Concursul Revistei Matematice din Timişoara, a întrunit până acum pe următorii corespondenţi înscrişi. In dreptul fie căruia s'a trecut numărul problemelor rezolvate şi publicate în numerile 1, 2, 3, 4, 5 ale revistei şi numărul de puncte întrunite.

CL. VI.

1. Basarab C. Alex.
2. Bey M. Gh., *3 puncte* (399, 386, 391).
3. Cristescu C. Ion, *3 puncte* (399, 386, 431).
4. Feldstein N. Solomon.
5. Ionescu Bujor Th. Andrei, *16 puncte* (378, 384, 392, 399, 352, 403, 380, 386, 391, 340, 342, 431, 341, 353, 437, 432).
6. Nedelceanu Emil.
7. Nestor Gh. D., *4 puncte* (399, 352, 386, 391).
8. Nicolau Dobridor I., *2 puncte* (403, 431).
9. Niculescu Emanuel, *3 puncte* (399, 425, 431).
10. Popescu N. Cornel, *10 puncte* (378, 379, 383, 384, 392, 395, 352, 386, 387, 353).
11. Popescu Stelian, *2 puncte* (431, 437).
12. Sobei Mircea, *2 puncte* (386, 391).

CL. VII.

1. Agapescu M. Nic., *7 puncte* (399, 394, 380, 391, 340, 342, 353).
2. Ardelea Radu, *17 puncte* (399, 352, 354, 403, 380, 386, 391, 408, 410, 340, 342, 416, 431, 341. 353, 426, 437).
3. Beşchea G. Nic., *19 puncte* (378, 383, 395, 399, 352, 354, 358, 394, 403, 404, 391, 410, 425, 340, 387, 431, 341, 426, 437).
4. Braester I. Otto, *21 puncte* (378, 379, 384, 392, 395, 396, 399, 352, 358, 404, 380, 386, 391, 410, 425, 340, 342, 341, 353, 426, 437).
5. Cernes A. M., *9 puncte* (395, 396, 399, 358, 403, 391, 408, 410, 437).
6. Ionescu Bujor Th. Const., *22 puncte* (378, 379, 383, 384, 395, 399, 352, 354, 358, 403, 404, 380, 386, 391, 425, 340, 342, 431, 341, 353, 426, 437).
7. Iscovici Paul, *13 puncte* (383, 392, 395, 399, 358, 403, 391, 410, 340, 431, 341, 426, 437).
8. Manoil-Roman A., *11 puncte* (379, 384, 399, 354, 358, 386, 391, 410, 341, 353, 437).
9. Mariş Marius, *11 puncte* (399, 352, 358, 404, 386, 410, 425, 340, 431, 426, 437).
10. Novacu A. C. Val., *10 puncte* (399, 352, 403, 404, 410, 340, 416, 431, 426, 437).
11. Podariu Alex., *3 puncte* (431, 426, 437).
12. Rădulescu C. Mihail, *7 puncte* (394, 391, 410, 425, 431, 426, 437).
13. Răpeanu Virgil, *18 puncte* (383, 384, 392, 395, 399, 352, 358, 394, 403, 391, 410, 425, 340, 342, 416, 431, 426, 437).
14. Segal Leon.
15. Stoica N. Aurel, *21 puncte* (378, 379, 383, 392, 395, 396, 399, 352, 358, 394, 403, 404, 386, 391, 410, 425, 431, 341, 353, 426, 437).
16. Teodorescu N., *26 puncte* (378, 383, 384, 392, 395, 396, 399, 400, 352, 354, 358, 394, 403, 404, 380, 386, 391, 408, 410, 425, 340, 342, 372, 341, 353, 426).

CL. VIII.

1. Botea G. N., *28 puncte* (378, 379, 383, 384, 392, 395, 396, 399, 400, 352, 354, 358, 394, 403, 404, 380, 386, 391, 410, 340, 342, 416, 431, 341, 353, 426, 437, 467).
2. Dărmănescu I., *4 puncte* (340, 431, 341, 426).
3. Dinescu Florin, *6 puncte* (399, 352, 403, 340, 341, 437).
4. Gudju Hercule.
5. Lupescu V. Eugen.
6. Tăraş Vasile, *26 puncte* (378, 383, 384, 392, 395, 399, 352, 354, 358, 394, 403, 404, 380, 386, 391, 408, 410, 425, 340, 342, 416, 432, 341, 353, 437, 461).
7. Vasiliu Gh. Gh., *16 puncte* (358, 394, 403, 386, 391, 408, 410, 425, 340, 416, 431, 341, 353, 426, 437, 446).
8. Vasilescu Bartolomeu, *13 puncte* (384, 399, 358, 394, 403, 391, 410, 416, 431, 341, 353, 426, 437).
9. Vlădea Ion, *24 puncte* (383, 384, 392, 395, 399, 358, 394, 403, 404, 380, 385, 386, 391, 408, 410, 340, 342, 387, 416, 431, 341, 353, 426, 437).

S'a mai înscris şi Winkler A. Alfred fără să indice clasa din care face parte.

Candidaţii sunt rugaţi să-şi completeze soluţiile problemelor propuse în numerile 7, 8, 9, 10 ale revistei, înaintându-le până la 5 Februarie pentru cercetare. Rezultatul concursului va fi publicat în numărul 12.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

ANUL V. 15 FEBRUARIE 1926 No. 12.

REVISTA MATEMATICĂ
DIN
TIMIȘOARA

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA APARE ODATA PE LUNA.
PREȚUL UNUI NUMAR 6 LEI PREȚUL ABONAMENTULUI 60 LEI PE AN.

CUPRINSUL

1. LOCOT.-COL. GH. BUICLIU. TEOREMA LUI SIMSON DEDUSA DIN TEOREMA LUI PASCAL
2. M. GHERMANESCU. ASUPRA PUTERII UNUI POLINOM
3. BIBLIOGRAFIE
4. CONCURSUL REVISTEI MATEMATICE
5. PROBLEME REZOLVATE: 468 487, 490, 492, 493, 498, 503
6. PROBLEME PROPUSE
7. INFORMATIUNI.

TIMISOARA
Institut de Arte Grafice „Cartea Românească"

Abonamentul pe anul VI-lea al revistei, care începe cu numărul prim la 15 Martie, costă

80 (OPTZECI LEI)

și se trimite pe adresa:

Ing. C. TEODORESCU,

Directorul Școalei Superioare P. T. T.

Timișoara.

Manuscrisele destinate Revistei Matematice din Timișoara conținând soluțiunile problemelor propuse și probleme, note sau articole originale vor fi trimise pe adresa: **V. Alaci**—profesor Școala Politecnică, Piața Doja 12—Timișoara.

Plata abonamentului precum și reclamațiunile de neprimirea Revistei vor fi adresate d-lui **Ing. C. C. Teodorescu** directorul Școalei Superioare P. T. T. Timișoara.

Colecția R. M. T., se găsește la Administrația Revistei, și se poate procura în schimbul prețului:

Anul I, epuizat.
Anul II, broșat, 80 lei
Anul III, broșat, 80 lei
Anul IV, broșat, 80 lei.
Anul V, broșat, 80 lei.

ANUL V. — NO. 12. TIMISOARA, 15 FEBRUARIE 1926.

REVISTA MATEMATICA DIN TIMISOARA

APARE LA 15 A FIECAREI LUNI

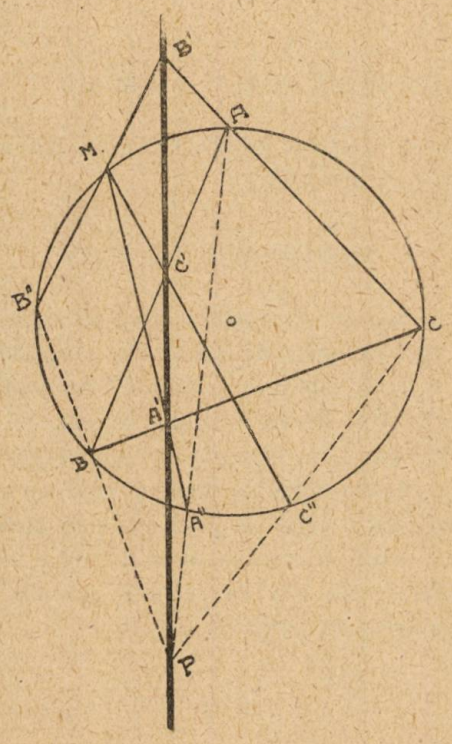
PRETUL UNUI NUMAR . . . . . 6 LEI
ABONAMENT ANUAL . . . . . 60 LEI
Abonamentele sunt socotite totdeauna dela 15 Martie

REDACTIUNEA: Prof. V. ALACI, Piata Doja 12 Timisoara
ADMINISTRATIA: Scoala Politecnica din Timisoara

TEOREMA LUI SIMSON DEDUSA DIN TEOREMA LUI PASCAL

de LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

Cele ce urmează sunt provocate de nota matematică No. 16, publicată la pag. 167, volumul V, unde d-l *C. Răut* își propune să dea o soluție nouă proprietății dreptei lui *Simson*, semnalată de d-l *Tr. Lalescu*, la pag. 147, vol. II, al aceleiași reviste. Soluția d-lui *C. Răut*, nu este nouă, ea nu diferă de a d-lui *Tr. Lalescu*, de cât doar prin numărul de cuvinte. In adevăr utilizând figura de față și confruntând cele două soluțiuni citate, se



vede că pentru a demonstra că „*dreapta, care unește vârful* A *al unui triunghiu* ABC *cu punctul* A″, *în care proectanta unui punct* M *de pe cercul* ABC *pe* BC *taie acest cerc, este paralelă cu dreapta lui Simson a punctului* M“, d-l *Tr. Lalescu* observă că:

$$\overset{\frown}{BAA''} = \overset{\frown}{BMA''} = \overset{\frown}{BC'A''}$$

pe când d-l *C. Răut*, observă că:

$$\overset{\frown}{MA''A} = \overset{\frown}{MCA} = \overset{\frown}{MA'A}$$

ceiace nu este o soluție nouă. Este cel mult citirea în altă ordine a literilor figurei.

Voi da o generalizare din care va rezulta soluția acestei proprietăți.

Iată generalizarea: *Fie* A′, B′, C′ *intersecțiile unei transversale* Δ *cu laturile unui triunghiu* ABC *și* M *un punct pe cercul circumscris acestui triunghiu. Dreptele* MA′, MB′, MC′ *întâlnesc a doua oară cercul în* A″, B″, C″. *Să se demonstreze că dreptele* AA″, BB″, CC″ *se întâlnesc într'un punct* P *de pe dreapta* Δ

Pentru demonstrarea acestei proprietăți mă voi servi de teorema lui *Pascal*: „*laturile opuse ale unui exagon înscris într'un cerc se întâlnesc în 3 puncte colineare*“.

In exagonul ACC″MB″B punctul B′ intersecția laturilor AC și MB″, punctul P intersecția laturilor CC″ și B″B și punctul C′ intersecția laturilor C″M și BA sunt colineare. De asemeni în exagonul AA″MC″CB punctul P′ intersecția laturilor AA″ și CC″, punctul A′ intersecția laturilor A″M și CB și punctul C′ intersecția laturilor MC″ și BA sunt colineare. Se vede că atât P cât și P′ se află la intersecția dreptei Δ cu CC″. Deci P se confundă cu P′ și teorema este demonstrată.

Se pune acum întrebarea *„cum trebue trasată transversala* Δ *pentru ca* P *să fie aruncat la infinit, prin urmare pentru ca dreptele* AA″, BB″, CC″ *să fie paralele“?*

Observ că AA″ va fi paralelă că Δ când:

$$(1) \qquad \widehat{AA''M} = \widehat{C'A'M}$$

dar din patrulaterul înscris AA″BM se scoate:

$$\widehat{AA''M} = \widehat{ABC} = \widehat{C'BM}$$

și prin urmare condiția (1) devine:

$$(2) \qquad \widehat{C'A'M} = \widehat{C'BM}$$

adică patrulaterul BMC′A′ trebue să fie inscriptibil. Ori în cazul când Δ este dreapta lui *Simson* a punctului M, patrulaterul acesta este inscriptibil și deci AA″ este paralelă cu Δ.

De aici se poate deduce o concluzie importantă, care generalizează teorema lui *Simson.*

Să presupun că patrulaterul BMC′A′ este inscriptibil ceia ce atrage:

$$\widehat{MBC'} = \widehat{MA'C'} = \widehat{MA''A}$$

deci Δ și AA″ sunt paralele. Unghiurile A′B′C și A″AC vor fi și ele egale ca alterne interne; dar din patrulaterul A″MAC se scoate:

$$\widehat{A''AC} = \widehat{A''MC} = \widehat{A'MC}$$

de unde se deduce:

$$\widehat{A'MC} = \widehat{A'B'C}$$

și deci patrulaterul A′MB′C este inscriptibil ceia ce atrage:

$$\widehat{MB'C} = \widehat{MA'B}$$

$$\therefore \quad \widehat{MB'C} = \widehat{MC'B} = \widehat{MA'B}$$

adică generalizarea teoremei lui *Simson* sub forma *„proectând oblic sub un același unghiu un punct de pe cercul* ABC *pe laturile triunghiului* ABC *se obțin punctele* A′, B′, C′ *situate pe o dreaptă* Δ“.

Proprietăți reciproce. *Unind un punct* P *cu vârfurile unui triunghiu* ABC *se obțin punctele* A″, B″, C″ *pe cercul* ABC. *Dreptele* A′A″, B′B″, C′C″ *se întâlnesc pe cercul* ABC. Această teoremă formează obiectul problemei 615, propusă de d-l *G. Țițeica* și rezolvată în *Gazeta Matematică*, volumul VII, pag. 259.

Luând punctul P la infinit dreptele AA″, BB″, CC″ devin paralele și teorema corespunzătoare se poate enunța: *Paralelele la o direcție* Δ, *duse prin vârfurile unui triunghiu* ABC *întâlnesc cercul circumscris în* A″, B″, C″. *Fie* A′, B′, C′ *intersecțiile laturilor triunghiului cu o transversală paralelă cu* Δ. *Dreptele* A′A″, B′B″, C′C″ *concură într'un punct* M *pe cercul* ABC.

Această proprietate mi se pare cunoscută dar nu-mi amintesc unde să o fi întâlnit. Ea demonstrează reciproca teoremei generalizată a lui *Simson.* In adevăr dacă AA″ este paralelă cu Δ atunci:

$$\widehat{A'MC} = \widehat{A''AC} = \widehat{A'B'C}$$

și patrulaterul A′MB′C este inscriptibil. De asemeni:

$$\widehat{MBC'} = \widehat{MA''A} = \widehat{MA'C'}$$

deci și patrulaterul MBA′C′ este inscriptibil și prin urmare se deduce:

$$\widehat{MA'B} = \widehat{MC'B} = \widehat{MB'C}$$

Observațiune. Problemele studiate până aici pot indica un nou mijloc de construcția tangentei într'un punct la cerc. Iată cum. Când C″ se confundă cu C dreapta PC devine tangentă la cerc, MC devine diametru iar C′ se găsește la intersecția lui AB cu MC. Construcția de făcut și care nu e de cât o consecință a celor de până aici este următoarea: Se duce arbitrar dreapta MA′A″, Prin intersecția dreptelor C′A′, AA″ se obține punctul P prin care va trece tangenta în C.

ASUPRA PUTERII UNUI POLINOM

de M. GHERMANESCU

Determinarea coeficienților desvoltării puterii unui polinom deși pare o chestiune relativ simplă, nu am găsit'o până acum tratat în cazul general. Un singur caz particular, când coeficienții polinomului sunt egali, a fost tratat — după indicațiunile date de d-l *V. Alaci* în teza d-sale — de *Moivre* și reluată în urmă de *D. André*.

De aceia, mi-am propus să abordez chestiunea în toată generalitatea sa, iar rezultatele simple obținute, le expun în cele ce urmează.

Ne propunem dar, să determinăm coeficienții desvoltării următoare:

$$(A)\quad (a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n)^p = c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_{np}x^{np}.$$

Metoda pe care o vom întrebuința, presupune. p oarecare, cu n întreg, cu condiția de a ne asigura de convergența seriei obținute în membrul al doilea, în cazul când p e diferit de un întreg pozitiv.

Luând derivata logaritmică a ambilor membrii ai egalității de mai sus și egalând, după ce am scăpat de numitori, coeficienții lui x^m din cei doi membrii ai egalității obținute, vom obține următoarea relațiune de recurență între primii $(m+1)$ coeficienți ai desvoltării căutate:

$$(1)\quad p(m+1)a_{m+1}c_0+(mp-1)a_mc_1+[(m-1)p-2]a_{m-1}c_2+[(m-2)p-3]a_{m-2}c_3+\ldots+(p-m)a_1c_m=(m+1)a_0c_{m+1}.$$

Dacă isolăm termenul în c_0 care este evident egal cu a_0^p și dăm lui m valorile succesive 1, 2,...$(m+1)$, obținem un sistem de $(m+1)$ ecuații cu necunoscutele $c_1, c_2, \ldots c_{m+1}$, care rezolvat cu ajutorul regulei lui *Cramer* ne dă pentru un coeficient oarecare c_k, expresiunea următoare:

$$(2)\quad c_k=-pc_0\frac{\begin{vmatrix} -a_0 & 0 & 0 & 0 & a_1\ldots 0\\ (p-1)a_1 & -2a_0 & & 0 & 2a_2\ldots 0\\ (2p-1)a_2 & (p-2)a_1 & -3a_0 & & \\ & (2p-2)a_2 & (p-3)a_1 & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -a_0 & 0 & 0 & 0\ldots 0\\ (p-1)a_1 & -2a_0 & 0 & \\ (2p-1)a_2 & (p-2)a_1 & -3a_0 & \\ (3p-1)a_3 & (2p-2)a_2 & (p-3)a_1 & 0\ldots 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}}$$

Valoarea determinantului dela numitor se află cu înlesnire; ea este:

$$(-1)^m m!\,a_0^m.$$

Cât privește determinantul de la numărător, el se reduce ușor la un determinant de ordinul k.

$$(-1)^{m-k}(k+1)(k+2)\ldots m\,a_0^{m-k}\begin{vmatrix} -a_0 & 0 & 0\ldots\ldots & a_1\\ (p-1)a_1 & -2a_0 & 0 & 2a_2\\ (2p-1)a_2 & (p-2)a_1 & -3a_0 & 3a_3\\ (3p-1)a_3 & (2p-2)a_2 & \ldots\ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ [(k-1)p-1]a_{k-1} & \ldots\ldots & \ldots & ka_k \end{vmatrix}$$

Insemnând pe acest din urmă cu Δ_k, vom putea scrie:

$$(3)\quad C_k=\frac{-pa_0^p(-1)^{m-k}(k+1)(k+2)\ldots m\,a_0^{m-k}}{(-1)^m m!\,a_0^m}\Delta_k$$

$$=(-1)^{k+1}p\frac{a_0^{p-k}}{k!}\Delta_k$$

expresiune independentă de m, după cum era de prevăzut.

Coeficienții c_k nefiind absoluți, — ei depinzând de a_0, a_1, a_n — o notație specială pentru ei nu poate avea mulți sorți de adaptare. Totuși, pentru un sistem dat de coeficienți a_0, a_1, $\ldots a_n$, se poate adopta o notație analoagă celei intrebuințate pentru coeficienții lui *Moivre*, corespunzători cazului:

$$a_0=a_1=\ldots=a_n=1$$

și anume:

$$c_k = [n, p]_k, \tag{4}$$

înțelegând astfel prin această notație, coeficientul lui x^k în desvoltarea

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)^p.$$

Notația de mai sus diferă de a lui *Moivre* prin poziționea ocupată de indicii n, p, k și îmi pare mai naturală și în acelaș timp mai comodă căci lasă afară indicele care variază dela termen la termen în aceiași desvoltare, k.

Să căutăm acum o altă expresiune explicită a coeficientului $[n, p]_k$.

Dacă în expresiunea aflată a acestui coeficient, dăm lui k valorile succesive 1, 2, 3, ... obținem:

$$[n, p]_1 = C_p^1 a_0^{p-1} a_1$$

$$[n, p]_2 = C_p^2 a_0^{p-2} a_1^2 + C_p^1 a_0^{p-1} a_2$$

$$[n, p]_3 = C_p^3 a_0^{p-3} a_1^3 + 2C_p^2 a_0^{p-2} a_1 a_2 + C_p^1 a_0^{p-1} a_3$$

$$[n, p]_4 = C_p^4 a_0^{p-4} a_1^4 + 3C_p^3 a_0^{p-3} a_1^2 a_2 + 2C_p^2 a_0^{p-2} a_1 a_3 + C_p^2 a_0^{p-2} a_2^2 + C_p^1 a_0^{p-1} a_4.$$

Din examinarea acestor coeficienți, se deduc următoarele proprietăți:

a) sunt omogeni, de gradul p, în $a_0, a_1, \ldots a_n$;

b) puterea (poids) termenilor cari intră în expresiunea unui coeficient, adică suma produselor indicilor prin exponenții respectivi este aceiaș, egală cu k corespunzător;

c) numărul termenilor cari intră în compunerea unui coeficient este egal cu numărul soluțiunilor întregi și pozitive ale sistemului de ecuații:

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = p \tag{5}$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k = k$$

$\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_k$ fiind respectiv exponenții lui $a_0, a_1, \ldots a_k$ în unul din termenii coeficientului $[n, p]_k$;

d) Coeficientul unui termen din expresiunea lui $[n, p]_k$ este:

$$\frac{p!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_k}$$

Aceste observațiuni făcute asupra câtorva cazuri particulare, sunt suficiente pentru a ne conduce la expresiunea generală a coeficientului $[n, p]_k$; ea este:

$$[n, p]_k = \sum \frac{p!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_k!} a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_k^{\alpha_k} \tag{6}$$

suma fiind întinsă la toate soluțiunile întregi și pozitive ale sistemului (4) considerat mai sus.

Aceasta este expresiunea pe care voiam s'o pun în evidență și care de altfel, este de întrebuințat în aplicațiunile practice.

Câteva relațiuni simple între acești coeficienți, se pot stabili cu înlesnire. Prima și cea mai importantă (1) a servit chiar la calculul lor.

O altă relațiune se capătă făcând $x = 1$ în identitatea:

$$(a_0 + p_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)^p = \tag{A}$$

$$[n, p]_0 + [n, p]_1 x + [n, p]_2 a^2 + \ldots + [n, p]_{np} x^{np}$$

obținem: *Suma coeficienților desvoltărei* (A) *este egală cu*:

$$(a_0 + a_1 + \ldots a_n)^p.$$

Dacă luăm derivatele succesive ale identității (A) în care facem apoi $x = 1$ căpătăm iarăși câteva relațiuni interesante, care ne dau sume de forma:

$$\Sigma k[n, p]_k = p(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)^{p-1}(a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n)$$

și altele.

O relațiune mai importantă, care exprimă coeficientul $[n, p]_k$ cu ajutorul coeficienților $[n, p-1]_k$ se capătă identificând coeficienții lui x^k din identitatea:

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)^p =$$

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)^{p-1}$$

se obține:

$$[n, p]_k = a_0[n, p-1]_k + a_1[n, p-1]_{k-1} + a_2[n, p-1]_{k-2} + \ldots \tag{7}$$

In general, făcând aceiași operațiune în identitatea:

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)^p =$$

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)^m (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)^{p-m}$$

obținem expresiunea, destul de remarcabilă:

(8) $[n, p]_k = [n, m]_0 [n, p-m]_k +$

$[n, m]_1 [n, p-m]_{k-1} + [n, m]_2 [n, p-m]_{k-2} + \ldots$

* * *

Am presupus până acum p întreg și pozitiv, deși după cum spuneam în introducere, această condițiune nu s'a impus în desvoltare. Să presupunem acum că p ia și altfel de valori. Deosebirea de cele stabilite până aci consistă că membrul al doilea din desvoltarea (A) nu mai este un polinom întreg în x, ci o serie, a cărei convergență trebue s'o studiem.

Să considerăm dar seria în x:

(B) $[n, p]_0 + [n, p]_1 x + [n, p]_2 x^2 + \ldots +$

Suma acestei serii, în caz de convergență este:

$$(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n)^p$$

Vom determina limita raportului:

$$(9) \qquad x \lim_{k=\infty} \frac{[n, p]_{k+1}}{[n, p]_k}.$$

Pentru aceasta, ne vom servi de relațiunea (1) care pentru $k > n$ este relațiunea de recurență între $(n+1)$ coeficienți consecutivi ai desvoltării (A).

După cele stabilite de *Poincaré* (American Journal 1871) și redate în atâtea ocăziuni până în prezent, dacă raportul de mai sus are o limită finită, acea limita este *în general*, rădăcina de modul maxim a ecuației limite, provenite din relațiunea (1) în modul următor:

Relațiunea (1) se mai poate scrie:

$$a_0 c_{k+1} = \frac{p-k}{k+1} a_1 c_k + \frac{2p-k+1}{k+1} a_2 c_{k-1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(n+1)p-k-1}{k+1} a_n c_{k-n+1}.$$

sau încă:

$$a_0 \frac{c_{k+1}}{c_k} \cdot \frac{c_k}{c_{k-1}} \cdot \frac{c_{k-1}}{c_{k-2}} \cdots \frac{c_{k-n+2}}{c_{k-n+1}} = \frac{p-k}{k+1} a_1 \frac{c_k}{c_{k-1}} \cdot$$

$$\frac{c_{k-1}}{c_{k-2}} \cdots \frac{c_{k-n+2}}{c_{k-n+1}} + \ldots + \frac{(n+1)p-k-1}{k+1} a_n.$$

Dacă raportul $\frac{c_{k+1}}{c_k}$ are o limită λ, aceiași limită o au și rapoartele analoage. Trecând doar la limită, această relațiune devine, pentru k tinzând la infinit:

$$(10) \qquad a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_n = 0.$$

Aceasta este ecuația la care conduce raționamentul lui *Poincaré*. Așa dar, raportul (9) are o limită, această limită este rădăcina de modul maxim a ecuației caracteristice (10).

Dacă comparăm ecuația (10) cu polinomul:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

corespondența se face foarte ușor și putem enunța rezultatul general următor:

Limita raportului a doi coeficienți consecutivi din desvoltarea în serie a puterii diferită de un întreg positiv, a unui polinom, este în general rădăcina p de modul minim a polinomului considerat.

Revenind acum la convergența seriei (B), condiția acsstei posibilități este:

$$\mu x < 1 \quad x < \frac{1}{\mu} = \lambda.$$

Așa dar.

Desvoltarea în serie convergentă a puterii diferită de un întreg pozitiv, a unui polinom, este posibilă în general, când x are o valoare inferioară rădăcinei de modul minim a polinomului considerat.

Am publicat acest studiu, deși face parte integrantă dintr'un studiu mai vast și cu un alt caracter de specialitate, pentru a pune la punct o chestiune elementară și pentru a învedera că mijloacele simple conduc fără ezitare la rezultate interesante.

Să vorbesc de aplicațiuni, este de prisos. Este destul să citez aplicațiunea făcută cu cazul particular al lui *Moivre*, la studiul seriilor trigonometrice și în special la integrala lui *Féjer*, de către d-l *V. Alaci* în teza d-sale de doctorat.

In ceia ce mă privește, mărturisesc că am întreprins acest studiu tocmai în vederea aplicațiunii la cazul general din studiul seriilor trigonometrice, aplicațiune pe care am realizat'o și pe care am s'o comunic la timpul său.

BIBLIOGRAFIE

1. *Gazeta Matematică*, anul XXXI, No. 5, Ianuarie 1926. Aritmetica și Algebra lui *Gh. Manu* (urmare și sfârșit), de Locot.-Col. *Gh. Buicliu*. Așezarea în ordine naturală a rădăcinelor a două ecuații de gradul al treilea (urmare și sfârșit), de *Th. Angheluță*.

2. *Foaia Matematică*, anul III, No. I, Ianuarie 1926. După doi ani, *Comitetul*. Chestiuni de transformare cosogonală, de *Micu Grünbaum*. O sumă trigonometrică, de *Tailer George*.

3. *Jurnal Matematic*, publicat de *Tiberiu Popovici*, vol. II, Decembrie, 1925. Asupra funcțiunii exponențiale, de *Tib. Popoviciu*. O generalizare a funcțiunii *Gamma*, de *Tib. Popoviciu*.

4. *Revista Matematică Bârlădeană*. anul I, No. 2, Februarie 1926. O chestiune de geometrie, de *Iosef Zaidman*. Găsirea identităților trigonometrice cu ajutorul determinanților, de *Gaiu Gh. Emanoil*. Chestiuni remarcabile, de *Micu Grünbaum*.

5. *Gheorghe Bratu. Curs de matematici generale, vol. I, fascicola 1. Matematici elementare, Cluj 1926.* Cuprinde: *Calculul numeric, calculul algebric, reprezentarea grafică, calcule cu logaritmi, trigonometrice și operații cu numere apropiate.*

Cartea este metodic întocmită, cu răbdare, îngrijire și pricepere lucrată, ea apare și în condițiuni tipografice foarte bune.

Diferitele chestiuni sunt expuse cu claritate, făcându-se adesea apel la intuiția geometrică. Ea își va ajunge desigur scopul urmărit de a fi de folos, nu numai elevilor de liceu, dar mai ales studenților școlilor superioare și profesorilor secundari și în general oricărei persoane care dorește să aibă un curs complect de *Matematici Generale*.

Recomandăm deci călduros tuturor cetitorilor noștri cartea d-lui profesor universitar *Gh. Bratu*, convinși fiind de realul folos ce'l vor avea.

6. *P. Sergesco. Sur le module minimum des zéros de l'équation trinom.* (Extrait des *Comptes-Rendus* des séances de l'Académie des Sciences, 16 novembre 1925).

CONCURSUL REVISTEI MATEMATICE DIN TIMIȘOARA

Entuziasmul cu care a fost primit anul trecut concursul nostru ne-a făcut să-l repetăm anul acesta în condițiuni aproape identice. Am menținut criteriul de clasificare după numărul punctelor, socotind câte cinci puncte pentru problemele propuse în special în vederea acestui concurs (prevăzute în Revistă cu câte un asterisc), câte două puncte pentru celelalte propuse în timpul concursului și câte un punct pentru problemele propuse la începutul anului. Modificarea introdusă anul acesta, anume de a decerne premii pe clase, este un progres spre echitate: am căutat să punem în concurență elemente pe cât se poate mai omogene preparate, pentru că cu toate sforțările noastre de compensare ne venea foarte greu să găsim balanța justă de cântărire a meritelor unui elev de clasa a cincia în concurență cu unul de clasa opta.

Ne-am așteptat la un progres și nu ne-am înșelat.

La concursul anunțat în No. 7 al „Revistei“ s'au înscris 37 de candidați (față de 24 de anul trecut) dintre care doi n'au obținut nici un punct. Repartizați pe clase s'au înscris:

în clasa V nici unul
în clasa VI 12
în clasa VII 16
în clasa VIII 9.

Cei mai mulți concurenți ni i-a dat liceul „Cantemir“ din București adică cinci, câte trei ne-au dat liceele din Brașov, Pitești, liceul militar și liceul Frații Buzești din Craiova, câte doi liceul din Arad, liceul Lazăr din București și liceul Național din Iași, iar celelalte și anume liceele din Bacău, București (Șincai, Sf. Sava, Matei Basarab, S. Haret), Botoșani, Giurgiu, Iași (Internat, Seminarul Pedagogic), P.-Neamț, Ploești, Roman, R.-Sărat, Timișoara câte unul.

Iată acum și rezultatul concursului pe clase.

Clasificat întâiul în clasa VI este d-l **Ionescu Bujor Andrei** elev al liceului „Cantemir“ din București, care a obținut 105 puncte. De altfel nu numai numărătoarea mecanică a problemelor impusă de concurs, dar și calitatea soluțiilor D-sale precum și întinderea cunoștințelor în raport cu vârsta sa didactică îl pun înaintea colegilor D-sale de clasă.

Mențiuni au obținut D-nii: **Nestor Gh.** elev al liceului „Cantemir“ din București (101 puncte) un serios și harnic deslegător de probleme și **Bey M. Gh.** elev al liceului „Frații Buzeștii“ din Craiova (87 de puncte).

Clasa VII își are în frunte pe D-l **Ionescu-Bujor Constantin** elev al liceului „Cantemir“ din București care a obținut 118 puncte și care

a pus o grijă deosebită de redacție în numeroasele probleme pe care le-a rezolvat. Menționi au D-nii: **Ardelea Radu** (liceul militar Craiova cu 113 puncte) și **Teodorescu N.** (liceul Sp. Haret din București cu 110 puncte).

D-l **Botea G. N.** elev al liceului „Cantemir" din București a luat premiul clasei a opta cu 122 de puncte. D-l. *Botea* este o cunoștință a noastră, a luat o mențiune lăudabilă și la concursul de anul trecut. De atunci încoace s'a desvoltat după cum prevedeam de altfel chiar de anul trecut, într'o direcție care-i era indicată. Soluțiile D-sale sunt acum matur concepute și gândite încât generalizările sau observațiunile de complectare decurg în mod natural.

Merită să fie menționați D-nii: **Tăraș Vasile** cu 118 puncte și **Vlădea Ion** cu 110 puncte ambii elevi ai liceului A. Șaguna din Brașov.

Cum se vede, liceul „Cantemir" din București a luat prin elevii săi toate premiile. Intâmplarea trebue să-și aibă cauza în atenția deosebită pe care profesorii de matematici ai liceului o pun în pregătirea elevilor.

In general concursul de anul acesta a însemnat o sforțare mai mare ca cel de anul trecut. Au fost candidați care au prezentat 50 de probleme pentru premiu și care s'au apropiat foarte mul de numărul maximum de puncte care se putea obține. Numărul acesta este 157 în cât premiații au realizat cam 67—78% din el. Din cauza acestui obiectiv, anume de a realiza cât mai multe puncte, calitatea redacției și adâncirii problemelor rezolvate a suferit întrucâtva chiar la cei mai distinși dintre concurenți. De vină e forma concursului desigur.

De altfel este greu la distanță să se găsească o formă obiectivă impecabilă de concurs.

Din această pricină precum și din dorința pe care o avem de a fi cât mai siguri să nu nedreptățim sforțările personale ale unora față de posibila sforțare susținută de un ajutor străin ale altora, ne străduim să găsim un mijloc de a reuni pe concureuți la un loc pentru concursul viitor, pentru a suporta proba în condițiuni cât mai apropiate.

VICTOR VALCOVICI

PROBLEME REZOLVATE

468. — *Să se calculeze pentru* $t=1$, *limita expresiei:*

$$E=\frac{2(1-t^{4k})}{(1-t^2)^3}-4\frac{k+1-t^{4k}}{(1-t^2)^2}+\frac{(2k+2)(2k+1)-2t^{4k}}{1-t^2}$$

k fiind întreg și pozitiv.

V. ALACI

Aducând la același numitor, putem scrie:

$$E=\frac{2(1-t^{4k})-4(k+1-t^{4k})(1-t^2)+(4k^2+6k+2-2t^{4k})(1-2t^2+t^4)}{(1-t^2)^3}$$

Efectuând înmulțire și reducerile posibile și ordonând în raport cu t, avem:

$$E=\frac{-2t^{4k+4}+(4k^2+6k+2)t^4-(8k^2+8k)t^2+4k^2+2k}{1-3t^2+3t^4-t^6}$$

Dar pentru $t=1$, expresiunea E ia forma nedeterminată $\frac{0}{0}$, și atunci putem aplica teorema lui *Hôpital*, avem:

$$E=\lim_{t=1}\frac{-(4k+4)t^{4k+3}+4(4k^2+6k+2)t^3-2(8k^2+8k)t}{-6t+12t^3-6t^5}$$

Dar pentru $t=1$, membrul al 2lea ia tot forma nedeterminată $\frac{0}{0}$ aplicăm deci din nou teorema lui *Hôpital*, avem:

$$E=\lim_{t=1}\frac{-2(4k+4)(4k+3)t^{4k+2}+12(4k^2+6k+2)t^2-2(8k^2+8k)}{-6+36t^2-30t^4}$$

care ia forma tot $\frac{0}{0}$ pentru $t=1$, și teorema lui *Hôpital* ne dă, încă:

$$E=\lim_{t=1}\frac{-2(4k+4)(4k+3)(4k+2)t^{4k+1}+24(4k^2+6k+2)t}{72t-120t^3}$$

$$=\frac{-16(k+1)(4k+3)(2k+1)+48(2k^2+3k+1)}{72-120}$$

$$=\frac{-16(k+1)(2k+1)(4k+3-3)}{-48}$$

Deci:

$$E=\frac{4k(k+1)(2k+1)}{3}.$$

Soluții date de d-nii: *Duport George* (lic. Sf. Sava, București), *Iacob St. Eugen* (Botoșani), *Manolescu I. N.* (lic. Focșani), *Nicolescu I. Emil* (Ploești), *Pantu Z. I.* (lic. Lazăr, București), *Pop Iulian* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Spacu G. Petru* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Tanovici V. C-tin* (Șc. Polit. Timișoara), *Vasilescu B.* (lic. Sf. Sava, București). *Vlădea Ioan* (lic. Brașov) și *Winkler A. Alfred* (Semin, Pedag., Iași).

487. — *Să se dovedească că expresiunea:*

$$128^{2n} \times 81^n - 2500^n \times 17^{2n},$$

se divide cu 1001.

V. ALACI

Expresiunea dată se poate scri succesiv:

$$(128 \times 9)^{2n} - (50 \times 17)^{2n} = 1152^{2n} - 850^{2n} =$$

$$(1001 + 151)^{2n} - (1001 - 151)^{2n} = \text{mult } 1001 +$$

$$151^{2n} - \text{mult } 1001 - 151^{2n} = \text{mult } 1001.$$

Observare. Avem mai general:

$$(a+b)^{2n} - (a-b)^{2n} = \text{mult } a + b^{2n} -$$

$$\text{mult } a - b^{2n} = \text{mult } a,$$

Pentru $a = 1001$, $b = 151$, avem problema de mai sus.

Soluții date de d-nii: *Agarici Gr. D-tru* (lic. mil., Iași), *Akerman Cazimir*, *Albeață N. Emil* (lic. Piatra-Neamț), *Ardelea Radu* (lic. milit., Craiova), *Avramescu T. Ioan* (lic. Caracal), *Băcanu V. Ion* (lic. Pitești), *Bădescu Aurelian* (lic. Sf. Sava, București), *Beșchea G. Nicolae* (lic. Brașov), *Bey M. Gheorghe* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Braester I. Otto* (lic. Național, Iași), *Călin M. Gheorghe* (lic. Caracal). *Câlniceanu Gh.* (lic. Tg.-Jiu), *Cercel C-tin* (lic. Tg.-Mureș), *Cernes A. M.* (lic. Național, Iași), *Constantinescu G. Gheorghe* (lic. Carol, Craiova), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Dimitriu Al. Ioan* (lic. Galați), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Dumitrescu I. Gostavățu* (lic. Caracal), *Dumitrescu Nathalia* (Șc. Normală, București), *Duport George* (lic. Sf. Sava, București), *Feldstein N. Solomon* (lic. Pitești), *Florea V. Gheorghe* (lic. Carol. Craiova), *Gavrilescu N. Ioan* (lic. P.oești), *Gheorghiu C-tin Adrian* (lic. Pitești), *Grabovschi* (lic. Orhei), *Grozăvescu D-tru* (lic. Fr. Buzești), *Grünberg M.* (lic. Național, Iași), *Grünberg Vigder* (lic. Național, Iași), *Iancu H. David* (lic. Național, Iași), *Ionescu B. Alexandru* (lic. Pitești), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu I. Iuliu* (lic. Giurgiu), *Ionescu M. Haralambe* (lic. Pitești), *Ionescu C. Nicolae* (lic. Tg.-Mureș), *Ionescu Stelian* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Iscovici Paul* (Pitești), *Istinie I. C. Breznica* (lic. Caracal), *Katz Lazăr* (lic. Botoșani), *Marius Mariș* (lic. Arad), *Morțun Emil* (lic. Lazăr, București), *Munteanu Gheorghe* (iis. mil., Craiova), *Nedelceanu Emil* (lic. Matei Basarab, București), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Nicalau I. C.* (Curtea de Argeș), *Nicolau Dobridor I.* (lic. mil. Craiova), *Nicolescu Emanuel* (lic. milit., Craiova), *Nicolescu I. Emil* (Șc. Polit. Timișoara), *Nițescu Paula* (Sc. Normală, București), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Pantu Z. I.* (lic. Lazăr, București), *Pârvu Aurel* (lic. Lazăr, București), *Podariu Al.* (lic. Piatra-Neamț), *Pop Iulian* (Șc. Polit., Timișoara), *Popescu Adela* (lic. Carmen-Sylva, București), *Popescu N. Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu Stelian* (lic. Lazăr, București), *Popescu C. Virgil* (lic. mil., Tg.-Mureș), *Popovici Gh.* (Piatra-Neamț), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Raiciu C. C-tin* (lic. Caracol), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Segal Leon* (lic. Botoșani), *Simionov Kindin* (lic. Tulcea), *Sobel I. Mircea* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Spacu S. Petru* (Șc. Polit., Timișoara), *Stoica N. Aureliu* (lic. Cantemir, București), *Stoicescu T. Teodor* (lic. Internat, Iași), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodoreccu N.* (lic. Spiru-Haret, București), *Tanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara), *Țari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, București), *Vasilescu Bartolomen* (lic. Sf. Sava, București), *Vasiliev Ilie* (lic. Tulcea), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timișoara), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov), *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag. Iași), și *Zamfirescu Ioan* (lic. Pitești).

490. — *Să se determine p și q astfel ca între rădăcinele ecuației, $x^2 + px + q = 0$, să avem relațiile:*

$$x'x'' = \frac{(x'-x'')^2 - (x'+1)}{2}$$

$$x' + x'' = (1-x')(2-x'') + 2(x'-x'') + 2.$$

BADESCU AURELIAN

Relațiile date se mai pot scri:

$$(1) \quad \begin{cases} x'^2 + x''^2 - 4x'x'' - x' - 1 = 0 \\ (x'-4)(x''-1) = 0. \end{cases}$$

Ecuația a doua, ne dă:

$$x' = 4, \quad x'' = 1.$$

Pentru $x' = 4$, prima ecuație devine:

$$x''^2 - 16x'' + 11 = 0,$$

de unde:

$$x'' = 8 \pm \sqrt{53}$$

Pentru $x'' = 1$, prima ecuație din (1) ne dă:

$$x'^2 - 5x' = 0,$$

de unde $x' = 0$, sau $x' = 5$.

Sistemul (1) are deci următoarele sisteme de soluții:

$$\begin{cases} x' = 4 \\ x'' = 8 + \sqrt{53} \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 4 \\ x'' = 8 - \sqrt{53} \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 0 \\ x'' = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x' = 5 \\ x'' = 1 \end{matrix}$$

Cum x', x'' sunt rădăcinele ecuației $x^2+px+q=0$, știm că:

$$(2) \qquad x'+x''=-p, \quad x'x''=q$$

Ținând seamă de sistemele de valori găsite pentru x', x'', relațiile (2) ne dau respectiv:

$$\begin{cases} p=-12-\sqrt{53} \\ q=32+4\sqrt{53}, \end{cases} \quad \begin{cases} p=-12+\sqrt{53} \\ q=32-4\sqrt{53}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} p=-1 \\ q=0, \end{cases} \quad \begin{cases} p=-6 \\ q=5. \end{cases}$$

Acestea sunt valorile cerute pentru p și q.

Soluții date de d-nii: *Agapescu M. Nicolai* (Sem. Pedag., Iași), *Bădescu Aurelian, Băcanu V. Ion* (lic. Pitești), *Bey M. Gh.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Birkental Alexandru* (lic. Lazăr, București), *Botea Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Braeșter I. Otto* (lic. Național, Iași), *Cerneș A. M.* (lic. Național, Iași), *Ciocoiu Laurențiu* (lic. Brașov), *Constantinescu Gh. Gheorghe* ()ic. Carol, Craiova), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Feldstein M. Solomon* (lic. Pitești), *Hacig Ioan* (lic. P.-Neamț), *Ionescu Th. Andrei Bujor* (lic. Cantemir, București), *Ionescu Th. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Iscovici Paul* (lic. Pitești), *Istinie I. C. Brezuică* (lic. Caracal), *Manoil Eugen* (Maior din Artilerie), *Matak D. Radu* (Semin. Pedag. București), *Nedelceanu Emil* (lic. Matei Basarab, București), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Nicolau Dobridor I.* (lic. Milit., Craiova), *Niculescu St. Emanual* (lic. Milit., Craiova), *Pantu Z. I.* (lic. Lazăr, București), *Podariu Alexandru* (lic. P.-Neamț), *Pop Iulian* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Popescu C. Virgiliu* (lic. T.-Mureș), *Popovici Th. Teodor* (Șc. Sup. de Comerț, București), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Scripcă Laur* (Șc. Polit., Timișoara), *Sobel I. Mircea* (lic. Craiova), *Spacu G. Petru* (Șc. Polit., Timișoara), *Stoica N. Aureliu* (Șc. Polit., Timișoara), *Tăraș Vasile* (lic. Brașov), *Teodoresca N.* (lic. Spiru Haret, București), *Țanovici V. C-tin* (Șc. Polit., Timișoara) *Țari N. Gheorghe* (lic. Lazăr, București), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sf. Sava. București), *Vasiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timișoara) și *Vlădea Ioan* (lic. Brașov).

492. — *Să se găsească suma seriei*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{(n+4)(n+6)(n+8)(n+10)}$$

V. COSNITA

Termenul general se poate descompune astfel:

$$(1) \quad \frac{n(n+2)}{(n+4)(n+6)(n+8)(n+10)}=\frac{A}{n+4}+\frac{B}{n+6}+\frac{C}{n+8}+\frac{D}{n+10}$$

unde coeficienții A, B, C, D trebuesc determinați. Multiplicând cu $n+4$ relația și în urmă luând $n=-4$, găsim:

$$A=\frac{1}{6}.$$

In același mod aflăm pe B, C și D, găsim astfel:

$$B=-\frac{3}{2}, \quad C=3, \quad D=-\frac{5}{3},$$

Atunci putem scri:

$$\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+6)(n+8)(n+10)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n+4}-\frac{9}{n+6}+\frac{18}{n+8}-\frac{10}{n+10}\right)=\frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+6}\right)-8\left(\frac{1}{n+6}-\frac{1}{n+8}\right)+10\left(\frac{1}{n+8}-\frac{1}{n+10}\right)\right],$$

sau:

$$(2) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{(n+4)(n+6)(n+8)(n+10)}=$$

$$\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+6}\right)-\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+6}-\frac{1}{n+8}\right)+\frac{5}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+8}-\frac{1}{n+10}\right).$$

Cum:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+6}\right)=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n+4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+6}=\frac{11}{30}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+6}-\frac{1}{n+8}\right)=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n+6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+8}=\frac{15}{56}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+8}-\frac{1}{n+10}\right)=\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+8}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+10}=\frac{10}{90}$$

urmează că:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{(n+4)(n+6)(n+8)(n+10)}=\frac{11}{180}-\frac{5}{14}+\frac{19}{54}=\frac{231-1350+1330}{180\times 7\times 3}=\frac{211}{3780}.$$

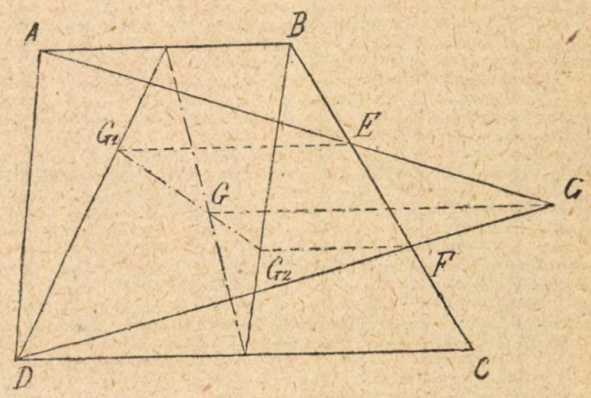
Soluții date de d-nii: *Agarici Gr. D-tru* (lic. Militar, Iași), *Ardelea Radu* (lic. Militar, Craiova), *Băcanu V. Ion* (lic. Pitești), *Bălășescu N. C-tin* (lic. Tg.-Mureș), *Beșchea G. Nicolae* (lic. Brașov), *Bey M. Gheorghe* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Botea G. Nicolae* (lic. Cantemir, București), *Braeșter I. Otto* (lic. Național, Iași), *Brezeanu P.* (lic. Tg.-Mureș), *Cercel C-tin* (lic. Tg.-Mureș), *Cernes A. M.* (lic. Național, Iași), *Chiser P. Marin* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Deoanca Nicolae* (Șc. Politechnică, Timișoara). *Dinescu Florin* (lic. Ploești), *Grigore Ion* (lic. Pitești), *Ionescu Bujor Th. C-tin* (lic. Cantemir, București), *Ionescu C. Nicolae* (lic. Tg.-Mureș), *Iscovici Paul* (Pitești), *Marineanu Traian* (iic. Timișoara), *Nestor G. D-tru* (lic. Cantemir, București), *Novacu Valeriu* (lic. Arad), *Podariu Alexandru* (lic. Piatra-Neamț), *Popesru Stelian* (lic. Lăzar, București), *Popescu Virgiliu* (lic. Tg.-Mureș), *Popoviciu Dedu* (Brașov), *Rădulescu C. Mihail* (lic. R.-Sărat), *Răpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Stoica N. Aurelia* (lic. Cantemir, București), *Tăras Vasile* (lic. Brașov), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Tanovici C.* (Șc. Polit. Timișoara). *Ullea Titus* (lic. Internat, Iași), *Vasilescu Bartolomen* (lic. Sf. Sava, București), *Visiliu Gh. Gheorghe* (lic. Timișoara), *Vlădea Ioan* (lic. Brașov) și *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag. Iași).

493*. — *În un trapez* ABCD, *împărțim una din laturile neparalele* BC *în trei părți egale prin punctele* E, F. *Ducem* AE *și* DF, *care se tae în* G. *Să se arate că paralela dusă la baze prin* G *trece prin centrul de greutate al trapezului.*

C. TEODORESCU

Fie G_1 și G_2 centrele de greutate ale triunghiurilor ABD și BDC. Centrul de greutate G al trapezului, se găsește la intersecția dreptei G_1G_2 cu dreapta ce unește mijloacele bazelor și avem:

$$\frac{GG_1}{GG_2}=\frac{\text{supr. BDC}}{\text{supr. DAB}}=\frac{DC}{AB}.$$



Se poate observa de asemenea că G_1E și G_2F sunt paralele cu cele două baze.

Dacă paralela dusă prin G, tae latura BC în H pentru ca această paralelă să treacă prin G, trebue să avem:

$$\frac{HE}{HF}=\frac{GG_1}{GG_2}=\frac{DC}{AB}.$$

Or din triunghiurile asemenea formate pe figură se poate scrie relațiile:

$$\frac{BE}{EH}=\frac{AB}{HG}$$

și:

$$\frac{FC}{EH}=\frac{DC}{HG}$$

și prin împărțire aflăm căci BE = FC:

$$\frac{FH}{EH}=\frac{AB}{DC}.$$

Notă. Proprietatea nu mai este adevărată dacă unim A, F și D, E. Ceia ce n'au observat unii corespondenți dând soluții greșite.

Au rezolvit problema d-nii: *Agapescu M. Nic.* (Semin. Pedag., Iași), *Botea N.* (lic. Cantemir, București), *Braeșter Otto* (lic. Național, Iași), *Cernes A. M.* (lic. Național, Iași), *Chiser P. Marin* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Manoil Eugen* (Maior din Artilerie), *Nestor G. Dum.* (lic. Cantemir, București), *Potopeanu C.* (Timișoara), *Râpeanu Virgil* (lic. Internat, Iași), *Scripcă Laur* (Șc. Politechnică, București), *Segal Leon* (lic. Laurian, Botoșani), *Sobel Mircea* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Winkler A. Alfred* (Semin. Pedag., Iași).

Au dat soluții analitice d-nii: *Tăraș V.* (lic. Șaguna, Brașov), *Vlădea Ion* (lic. Șaguna, Brașov), *Nicolau C.* (student).

498.* — *Să se demonstreze că expresiunea:*

$$(x+y-z)^5+(y+z-x)^5+(z+x-y)^5-(x+y+z)^5$$

se divide prin $x^2+y^2+z^2$.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

Problema aceasta am dedus-o din următoarea teoremă generală: *Dacă* $P(x, y, z)$ *este un polinom simetric și omogen de gradul* $2n+1$, *care se anulează pentru* $x=0$, $y=0$ *și* $z=0$, *atunci el se divide printr'un polinom* $P(x, y, z)$ *de gradul* $2(n-1)$.

Această teoremă este ușor de demonstrat, ea se deduce din proprietățile polinoamelor simetrice și omogene, expuse în *Calculul Algebric* de d-l Profesor *Tr. Lalescu.*

Pentru cazul particular al problemei 498 expresiunea din enunț se reduce la zero pentru:

$$x=y=z=0,$$

deci se divide prin produsul xyz câtul fiind de forma:

$$P=\alpha\Sigma x^2+\beta\Sigma xy.$$

Pentru $x=y=z=1$ $x=y=1$, $z=-1$, găsim respectiv:

$$\alpha+\beta=-80 \quad \text{și} \quad 3\alpha-\beta=-240$$

$$\therefore \quad \alpha=-80, \quad \beta=0$$

$$\therefore \quad P=-80(x^2+y^2+z^2).$$

Unii corespondenți comunică că în „*Culegerea de Probleme de Algebră*“ de *A. G. Ioachimescu*, ed. II, pag. 7, exercițiul 37, se cere să se descompue în factori suma:

$$(x+y+z)^5-(x+y-z)^5+(x-y+z)^5-(y+z-x)^5$$

care înmulțită cu -1 dă suma din enunțul problemei 498. Prin urmare această problemă era cunoscută.

G. B.

S'au primit soluțiuni foarte bune dela d-nii: *Agapescu N.* (Semin. Ped., Iași), *Aposteanu I.* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara), *Ardelea R.* (lic. milit., Craiova), *Atanasiu C.* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Băcanu I.* (lic. Pitești), *Beșchea N.* (lic. Meșotă, Brașov), *Bey G.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Botea N.* (lic. Cantemir, București), *Braester O.*, *Cernes M.* (lic. Național, Iași), *Constantinescu Gh. Gh.* (lic. Carol, Craiova), *Cristescu I.* (lic. Șincai, București), *Dângă V.* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Dărmănescu I.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Dinescu F.*, *Dumitrescu E.* (lic. Buzău), *Feldștein S.*, *Gheorghiu A.* (lic. Pitești), *Grabovschi E.* (Orhei), *Ionescu T. Andrei Bujor*, *Ionescu T. C-tin Bujor* (lic. Cantemir, București), *Iscovici P.* (lic. Pitești) *Manolescu N.* (lic. Focșani), *Marcu A.* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Marineanu T.* (lic. Timișoara), *Mariș M.* (lic. Arad), *Mogoșan C.* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Munteanu G.* (lic Milit., Craiova), *Negreu P. I.*, *Nestor D.* (lic. Cantemir, București), *Nicolau-Dobridor I.* (lic. Mil. Craiova), *Nicolescu I. Em.* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Niculescu Șt. Em.* (lic. Milit., Craiova), *Novacu V.*, *Pascariu A.* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Popluca M.* (lic. Arad), *Podariu A.* (lic. Petru-Rareș, P.-Neamț), *Pantu I.* (lic. Gh. Lazăr București), *Pop. I.* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Popescu Corneliu* (lic. Giurgiu), *Popescu St.*, *Râpeanu V.* (lic. Internat, Iași), *Popovici Th. Teodor* (Șc. Superioară de Comerț, București), *Scripcă L.* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Segal L.* (lic. Botoșani), *Segărceanu C.*, *Sobel M.* (lic. Fr. Buzești, Craiova), *Spacu P.* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Stoica A.* (lic. Cantemir, București), *Tanovici C.* (Șc. Politechnică, Timișoara), *Tăraș V.* (lic. Șaguna Brașov), *Tari G.* (lic. Gh. Lazăr, București), *Teodorescu N.* (lic. Spiru Haret, București), *Ulea T.* (lic. Internat, Iași), *Vasilescu Bartolomeu* (lic. Sava, București), *Vasiliu Gh. Gh.* (lic. Diaconovici-Loga, Timișoara), *Vlădea I.* (lic. Șaguna, Brașov). *Winkler A.* (Sem. Pedag., Iași) și *Zamfirescu I.* (lic. Pitești).

S'a primit și o foarte bună soluție nesemnată.

D-l *Mareș M.* citează încă următoarele locuri unde se găsește descompusă în factori expresiunea dată: „*Culegerea de probleme de algebră elementară*“ de *Dimitriu I.*; „*Calculul Algebric*“ de *Lalescu Tr.*; articolul „*Identități algebrice deduse cu ajutorul calculelor de algebră elementară*“ de *Ștefănescu E.*

503.* — *Un vagon de marfă are distanța între osii* $l=4.50$ *m., greutatea lui este* $G=18$ *tone, iar centrul de greutate îl admitem la o înălțime* $h=1.45$ *m.. deasupra șinei. Dacă frânăm brusc vagonul, să se afle reacțiunile în dreptul roților. (Coeficientul de frecare* $f=0,15$*).*

C. TEODORESCU

Soluție dată de d-l *Stelian Popescu* (lic. Lazăr, București).

Fie R_1 și R_2 cele două reacțiuni verticale pe cele două osii, și F_1 și F_2 forțele de frecare ce iau naștere la frânarea vagonului, avem;

$$F_1=fR_1, \qquad F_2=fR_2.$$

Scriind ecuațiile de echilibru, și anume ecuația de proecții pe verticală și ecuația momentelor în raport cu centrul de greutate, avem:

$$R_1 + R_2 = G$$

$$R_1 \frac{l}{2} - F_1 h - R_2 \frac{l}{2} - F_2 h = 0,$$

din care scoatem:

$$R_1 = \frac{G}{2}\left(1 + 2f\frac{h}{l}\right)$$

$$R_2 = \frac{G}{2}\left(1 - 2f\frac{h}{l}\right).$$

Pentru aplicația numerică avem:

$$R_1 = \frac{18000}{2}\left(1 + 2 \times 0{,}15\,\frac{1{,}45}{4{,}50}\right) = 9872 \text{ kg.}$$

$$R_2 = \frac{18000}{2}\left(1 - 2 \times 0{,}15\,\frac{1{,}45}{4{,}50}\right) = 8127 \text{ „}$$

PROBLEME PROPUSE

481.* — Fie ab un număr întreg format din numerile a și b scrise unul după altul și $a_1 b_1$ numărul ce se obține sporind toate cifrele lui ab cu 1. Să se găsească numărul $a_1 b_1$ mai mic ca 1000, știind că numărul numerilor prime și mai mici ca el, este ab.

LOCOT.-COL. GH. BUICLIU

518. — Să se găsească numerile de patru cifre ale căror patrate perfecte se termină cu de trei ori numărul însuși.

GH. CONSTANTINESCU

519. — Se dau cercurile O_1, O_2 și un punct A în planul lor. Să se construiască un al treilea cerc O_3 care trece prin A și taie cercurile O_1 și O_2 în B și C astfel în cât, $AB = AC$, iar dreapta BC este văzută de pe cercul O_3 sub un unghiu dat α. Discuție.

I. PROTOPOPESCU

*) Problema 481, fiind cunoscută se anulează, publicându-se sub același număr alta.

520. — In raport cu axele rectangulare xOy se dau punctele A(1, 0), B(0, 1) și C(0, —1). O dreaptă OD mobilă în jurul lui O taie dreptele AB și AC respectiv în punctele P și Q. Se cere:

1°. Să se găsească și în urmă să se construiască locul geometric al punctului M mijlocul segmentului PQ, când OD se rotește în jurul lui O.

2°. Să se determine dreptele OD pentru care avem, $MA = OA$, să se arate că sunt două drepte cari îndeplinesc această condițiune; să se determine unghiul lor cu axa Ox.

AUGUST COMAN

521. — Să se stabilească identitatea:

$$\frac{1}{abc}\left[\frac{1}{a^2(b-a)} + \frac{1}{a^2(a-b)}\right] - (ab + ac + bc)\left[\frac{1}{a(b-a)} + \frac{1}{b(a-b)}\right] = -1.$$

V. ALACI

522. — Să se rezolve ecuația:

$$\cos^2[x + 2a(n+1)]\cos^2[x + 2a(n-1)]\sum_{k=0}^{n}\sin(x + 4ak) =$$

$$2\cos^2 2a \sin 2(x + 2an)\sum_{k=0}^{n}\cos(x + 4ak).$$

EUGENIU GRABOVSCHI

523. — Știind că ecuațiunea:

$$x^3 + (p-3)x^2 + 2qx + 2(1-q) = 0,$$

are ca rădăcini, $\sec^2 A$, $\sec^2 B$, $\sec^2 C$, să se formeze ecuațiunea care admite ca rădăcini, $\operatorname{tg}^2 A$, $\operatorname{tg}^2 B$, $\operatorname{tg}^2 C$, A, B, C fiind unghiurile unui triunghiu.

VASILE C. GABRIELESCU

524, — Se dau n forțe concurente cari formează două câte două unghiuri egale și ale căror extremități descriu o dreaptă dată. Se cere locul geometric al extremității rezultantei lor.

ION C SCHILERU-DILI.

INFORMAȚIUNI

Concursul R. M. T. 1925

Dăm aci mai jos lista punctelor obținute de concurenții la premiile revistei, în ordinea clasificației.

CL. VI

Ionescu Bujor Th. Andrei (lic. Cantemir, București) *105* puncte.

Nestor G. Dum. (lic. Cantemir, București) *104* puncte.

Bey M. Gh. (lic. Fr. Buzești, Craiova) *87* puncte.

Nicolau Dobridor I. (lic. militar, Craiova) *77* puncte.

Sobel I. Mircea (lic. Fr. Buzești, Craiova) *77* puncte.

Popescu N. Cornel (lic. I. Maiorescu, Giurgiu) *68* puncte.

Niculescu Em. (lic. militar, Craiova) *68* puncte.

Popescu Stelian (lic. Lazăr, București) *62* puncte.

Feldstein N. Solomon (lic. Brătianu, Pitești) *51* puncte.

Cristescu C. Ion (lic. Șincai, București) *42* puncte.

Nedelceanu Emil (lic. M. Basarab, București) *16* puncte.

Basarab C. Alex. (lic. Ferdinand, Bacău) *4* puncte).

CL. VII.

Ionescu Bujor Th. Const. (lic. Cantemir, București) *118* puncte.

Ardelea Radu (lic. militar, Craiova) *113* puncte.

Teodorescu N. (lic. Spiru-Haret, București) *110* puncte.

Stoica N. A. (lic. Cantemir, București) *110* puncte.

Braester Otto (lic. Național, Iași) *100* puncte.

Cernes A. M. (lic. Național, Iași) *92* puncte.

Iscovici I. (lic. Brătianu, Pitești) *85* puncte.

Segal Leon (lic. Laurian, Botoșani) *78* puncte.

Beșchea G. N. (lic. Meșota, Brașov) *62* puncte.

Răpeanu Virgil (lic. Internat, Iași) *62* puncte.

Podariu Alex. (lic. P. Rareș, Piatra-Neamț) *54* puncte.

Novacu A. C. (lic. M. Nicoară, Arad) *53* puncte.

Agapescu M. Nic. (Sem. pedagogic, Iași) *51* puncte.

Mariș Marius (lic. M. Nicoară, Arad) *48* puncte.

Rădulescu C. M. (lic. Ferdinand, R.-Sărat) *32* puncte.

Manoil-Roman A. (lic. Roman-Vodă, Roman) *25* puncte.

CL. VIII.

Botea G. N. (lic. Cantemir, București) *122* puncte.

Tăraș V. (lic. Șaguna, Brașov) *118* puncte.

Vlădea I. (lic. Șaguna, Brașov) *110* puncte.

Vasiliu Gh. Gh. (lic. Diaconovici-Loga Timișoara) *107* puncte.

Dărmănescu I. (lic. Fr. Buzești, Craiova) *98* puncte.

Vasilescu B. (lic. Sf. Sava, București) *77* puncte.

Dinescu Fl. (lic. Sf. Petru și Pavel, Ploești *69* puncte.

Gudju H. (lic. Lazăr, București) *0* puncte.

Lupescu V. Eugen (lic. Brătianu, Pitești), *0* puncte.

Anunțăm că nu vom mai lua în considerare, problemele rezolvate, iscălite de mai mulți corespondenți. Fiecare corespondent trebue să-și redacteze problema rezolvată și să iscălească.

Primim încă dela unii corespondenți mai multe probleme redactate pe o singură foaie. Cum problemele când sosesc la redacție se repartizează fiecare la numărul corespunzător, e ușor de înțeles că repartizarea nu-i posibilă când sunt mai multe probleme pe o foaie. In consecință rugăm pe corespondenții noștri să redacteze fiecare problemă separat, și când o problemă necesită mai multe foi, ele trebuesc prinse la un loc. Figurile asemenea trebuesc făcute separat și prinse la problemă. Atragem în același timp atenția harnicilor noștri corespondenți să pue mai multă atenție și osteneală pentru o redactare mai îngrijită ca fond și formă.

Tabla de materie va apare în supliment.

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMIȘOARA.

(Supliment la R. M. T., No. 12).

TABLA DE MATERII

ARTICOLE

Ciorănescu N. Discuţia ecuaţiilor de gr. III şi IV 3
Popovici Tib. Asupra unor determinanţi şi a ecuaţiilor lor caracteristice . 19
Constantinescu Gh. Teoreme asupra determinanţilor 35
Alaci V. Asupra identităţilor lui Euler . 51
Ştefănescu Emil. Identităţi algebrice deduse cu ajutorul calculelor de algebră elementară 67
Vâlcovici V. Asupra unor formule de mecanică 83
Popovici Tib. Asupra coeficienţilor binomiali 99
*** Concurs 102
Alaci V. Aflarea directă a câtului a două polinoame 116
Stoenescu Al. I. Asupra unor serii 131
Crăciunescu I. O proprietate a cercului şi a sferei 148
Alaci V. Aflarea directă a câtului a două polinoame (urmare) 163
Buicliu Gh. Lt.-Col. Teorema lui Simson dedusă din teorema lui Pascal 179
Ghermănescu M. Asupra puterii unui polinom . 181

NOTE MATEMATICE

Alaci V. Teoremă relativă la determinantul Vandermonde 5
Alaci V. O teoremă relativă la determinanţi 12
Abramescu N. Asupra înlocuirii unei rotaţii în jurul unei axe prin două simetrii 37
Alaci V. Teoremă asupra determinanţilor 37
Alaci V. Teoremă asupra determinanţilor 53
Teodorescu N. Asupra articolului. Discuţiunea rădăcinilor unei ecuaţii de gradul al doilea (R. M. T. IV, No. 11) 70
Popovici Tib. Asupra calculării discriminantului ecuaţiei de gr. III . . 71
Buicliu Gh. Lt.-Col. Asupra problemei 387 . . . 84
Alaci V. Evaluarea unei sume algebrice 84
Beşchea G. N. Câteva formule trigonometrice 103
Buicliu Gh. Lt.-Col. Asupra problemei 420 . . . 121
Stoenescu Al. I. Asupra problemei 134 (R. M. T. III, pag. 7) 121
V. A. Asupra problemei 170 (R. M. T. IV, No. 8) 133
Răduleţ-Popa B. R. Asupra funcţiunilor omogene şi pseudoomogene 133
Ştefănescu Emil. Asupra funcţiunilor trigonometrice inverse 152
Răuţ C. Asupra unei proprietăţi a dreptei lui Simson 167
Alaci V. Câtul a două polinoame . . . 168

BIBLIOGRAFIE

Gazeta Matematică. 6, 23, 39, 55, 72, 86, 103, 122, 136, 153, 168, 184.
Foaia Matematică. 6, 23, 39, 55, 72, 86, 103, 122, 136, 153, 168, 184.
Jurnal Matematic. 6, 55, 72, 184.
Curierul Matematic. 23, 39, 55, 72, 86, 103, 122, 136, 153, 168.
Insemnări Matematice 23, 40, 72, 86, 122.
P. Sergesco. Un problème sur la composition des noyaux symétriques 24
Societatea Română de ştiinţe, 39.
A. Angelesco. Détermination de certaines courbes par des ensembles discrets de points 55
A. Angelesco. Sur les polynomes hypergéométriques 55
P. Sergesco. Quelques remarques sur les noyaux symétriques 55
P. Sergesco. Sur les noyaux symétriques gauches 55
Micu Grümbaum. Arta de a fi geometru . . . 122
N. Abramescu şi V. Lupescu. Lecţiuni de trigonometrie 122
P. Sergesco. Monografie asupra ecuaţiilor algebrice cu toate rădăcinele reale 135
Revista Matematică Bârlădeană, 168, 184.
N. Abramescu. Formule pentru geometria triunghiului 169
N. Abramescu. Lecţiuni de geometrie analitică 169
N. Abramescu şi G. Orăşeanu. Curs de aritmetică raţionată 169
Al. Manicatide. Algebra elementară, revăzută şi adăogită de *N. Abramescu* . 169
Gh. Bratu. Curs de matematici generale (vol. I) 184
P. Sergesco. Sur le module minimum des zéros de l'équation trinôme 184

CHESTIUNI DE EXAMEN

Şcoala Politechnică din Timişoara

Examen parţial de geometrie analitică 11 Martie 1925 39
Examen de fine de an, geometria analitică 1 Iunie 1925 72
Examen de analiză 24 Iunie 1925 72
Examenul de admitere în anul I, 19 Octombrie 1925 135
Examen de bacalaureat, Arad. Sesiunea 1925 . . . 136

PROBLEME PROPUSE

Numărul de ordine al problemei în *cifre cursive*, primul număr următor indică pagina unde a fost propusă în anul respectiv, al doilea număr indică pagina din acest volum unde a fost rezolvată, N indică problemele nerezolvate încă.

DIN ANUL I

42, 94, N;
50, 110, N;
54, 126, N;
69, 142, N;
81, 174, 86 V;
91, 187, N;
92, 187, N;
98, 187, N;
99, 187, N;
100, 187, N;

DIN ANUL II

109, 14, N;
110, 14, N;
114, 30, N;
121, 30, N;
124, 30, N;
140, 62, N;
141, 62, N;
142, 77, N;
150, 78, N;
154, 78, N;
156, 94, N;
157, 94, N;
161, 94, N;
162, 94, N;
163, 94, N;
164, 94, N;
165, 94, N;
166, 110, 103 V;
168, 110, 104 V;
169, 110, 105 V;
170, 110, 122 V;
171, 110, 106 V;
172, 110, 106 V;
173, 110, N;
174, 110, N;
175, 110, N;
176, 126, N;
178, 126, N;
180, 126, N;
184, 126, N;
185, 126, N;
186, 142, N;
191, 142, N;
194, 142, N;
195, 142, N;
197, 158, N;
198, 158, N;
199, 158, N;
205, 174, N;
206, 174, N;
207, 174, N;
208, 174, N;
212, 174, N;
213, 174, N;
214, 185, N;
217, 185 N;
219, 185, N;

DIN ANUL III

230, 14, N;
233, 30, N;
235, 30, N;
243, 46, N;
244, 46, N;
245, 46, N;
248, 46, N;
253, 62, N;
255, 62, N;
256, 62, N;
259, 62, N;
264, 78, N;
267, 78, 107 V;
268, 78, N;
270, 94, 108 V;
275, 94, N;
276, 94, 153 V;
289, 126, N;
291, 126, N;
296, 142, N;
299, 142, N;
304, 158, N;
305, 158, N;
307, 158, N;
310, 174, N;
313, 174, N;
314, 174, N;
315, 174, N;
317, 174, N;
318, 185, N;
319, 185, N;
323, 185, N;
325, 185, 154 V;
326, 185, 87 V;

DIN ANUL IV

328, 14, N;
329, 14, N;
331, 14, N;
334, 14, N;
335, 14, N;
336, 14, N;
337, 30, 109 V;
338, 30, N;
340, 30, 55 V;
341, 30, 72 V;
342, 30, 57 V;
343, 30, N;
344, 30, N;
345, 30, N;
346, 46, N;
347, 46, N;
348, 46, N;
351, 46, 123 V;
352, 62, 24 V;
353, 62, 75 V;
354, 62, 25 V;
357, 62, N;
358, 62, 26 V;
359, 62, N;
361, 78, N;
369, 94, N;
372, 94, 58 V;
374, 94, N;
376, 94, N;
377, 94, 6 V;
378, 110, 6 V;
379, 110, 7 V;
380, 110, 40 V;
381, 110, N;
382, 110, N;
383, 110, 7 V;
384, 110, 8 V;
385, 100, 40 V;
386, 126, 41 V;
387, 126, 59 V;
388, 126, N;
389, 126, N;
390, 126, N;
391, 126, 42 V;
392, 126, 9 V;
393, 126, N;
394, 126, 27 V;
395, 142, 10 V;
396, 142, 10 V;
397, 142, N;
398, 142, 169 V;
399, 142, 11 V;
400, 158, 12 V;
401, 158, N;
403, 158, 29 V;
404, 158, 29 V;
405, 158, N;
406, 158, N;
407, 158, N;
408, 158, 43 V;
409, 158, 88 V;
410, 158, 44 V;
411, 158, N;
412, 174, N;
413, 174, N;
414, 174, N;
415, 174, N;
416, 174, 59 V;
417, 174, 89 V;
418, 174, N;
419, 174, 90 V;
420, 191, 91 V;
421, 191, N;
422, 191, 155 V;

423, 191, N;
424, 191, N;
425, 191, 45 V;
426, 191, 75 V;
427, 191, N;
428, 191, N;
429, 191, 92 V;

DIN ANUL V

430, 13, 136;
431, 13, 61;
432, 13, N;
433, 13, 92;
434, 13, 124;
435, 13, N;
436, 13, N;
437, 13, 77;
438, 30, N;
439, 30, 138;
440, 30, N;
441, 30, N;
442, 30, N;
443, 30, N;
444, 30, N;
445, 46, N;
446, 46, 93;
447, 46, N;
448, 46, N;
449, 46, N;
450, 46, N;
451, 46, 139;
452, 46, 125;
453, 46, N;
454, 46, 125;
455, 62, 140;
456, 62, N;
457, 62, N;
458, 62, N;
459, 62, N;
460, 62, N;
461, 62, N;
462, 62, N;
463, 78, 141;
464, 78, N;
465, 78, N;
466, 78, N;
467, 78, 155;
468, 78, 185;
469, 78, N;
470, 78, 169;
471, 94, 156;
472, 94, 170;
473, 94, N;
474, 94, N;
475, 94, N;
476, 94, N;
477, 94, 171;
478, 94, N;
479, 94, N;
480, 110, 157;
481, 110, 190, N;
482, 110, 172;
483, 110, 172;
484, 110, 173;
485, 110, N;
486, 110, 157;
487, 126, 186;
488, 126, N;
489, 126, N;
490, 126, 186;
491, 126, N;
492, 126, 187;
493, 126, 188;
494, 126, N;
495, 142, N;
496, 142, N;
497, 142, N;
498, 142, 189;
499, 142, N;
500, 142, N;
501, 142, N;
502, 142, N;
503, 142, 189;
504, 158, N;
505, 159, N;
506, 159, N;
507, 159, N;
508, 159, N;
509, 159, N;
510, 159, N;
511, 159, N;
512, 174, N;
513, 174, N;
514, 174, N;
515, 174, N;
516, 174, N;
517, 174, N;
518, 190, N;
519, 190, N;
520, 190, N;
521, 190, N;
522, 190, N;
523, 190, N;
524, 190, N;

TABLOUL NUMELOR

Abason E., 14.
Abramescu C., 40.
Abramescu N., 14, 30, 37, 55, 70, 122, 136, 169.
Ackerman Casimir, 61, 137, 138, 156, 157, 171, 186.
Adam Mircea, 104, 106, 107, 123.
Adam D. Romeo, 146.
Adamescu Maxim, 14.
Agapescu M. Nic., 11, 28, 40, 42, 56, 57, 75, 87, 90, 157, 171, 172, 173, 174, 175, 187, 188, 189, 191.
Agârbiceanu I., 24, 40, 86.
Agarici Gr. Dum., 61, 77, 124, 137, 138.
Alaci V., 2, 5, 13, 14, 18, 23, 25, 30, 34, 39, 42, 46, 47, 50, 51, 55, 62, 66, 75, 78, 82, 85, 89, 92, 94, 98, 102, 106, 107, 110, 114, 115, 123, 126, 130, 131, 133, 134, 139, 142, 146, 158, 162, 163, 171, 174, 178, 181, 183, 185, 186, 190.
Albiate P. Emil, 157, 173, 186.
Alexandrescu El., 14.
Alexandrescu Mihai, 106.
Alexandrescu A. N., 106.
Amărăscu Gavril, 104, 105, 106, 123.
Anastasiu Th. C., 30.
Anastasiu P. Vasile, 11, 42, 61, 137, 138, 139, 141.
Andron G., 11, 28, 42.
Angelescu A., 14, 55.
Angelescu N. Traian, 56, 74, 87, 109, 123, 154.
Angheluță Th., 14, 21, 163, 168, 184.
Antistescu Nic. 8, 10, 28, 42, 56, 57.
Antofie C. Nic., 8,
Antoniu S. Ion, 106, 123.
Antoniu Simion, 42.
Apăteanu Camil, 87.
Aposteanu I., 26, 42, 44, 56, 90, 93, 125, 136, 138, 139, 157, 171, 173, 189.
Aposteanu Vasile, 42, 137.
Apostol Carol, 6.
Apostoleanu D. Tr., 61.
Apostolescu V. C., 8.
Apostoliu C. Ioan, 11, 42, 137, 138.
Arcadian Nicu, 104, 105, 106, 109, 123.
Ardelea Radu, 11, 24, 26, 29, 40, 42, 44, 45, 56, 57, 61, 75, 76, 77, 87, 90, 92, 93, 124, 137, 138, 139, 141, 154, 157, 158, 171, 172, 173, 174, 175, 185, 186, 188, 189, 191.
Arghir Iancu, 14.
Atanasiade Alex., 104,
Atanasiu Th. C., 13, 124, 189.
Atanasiu I. D-tru, 104, 109.
Avram Iorgu, 73, 124.
Avramescu Th. I., 42, 91, 93, 137, 138, 141, 157, 171, 186.

Babeș A., 9, 10, 42, 56, 57.
Băcanu V. Ioan, 186, 187, 188, 189.
Baciu Gh. I., 157, 171.
Bădescu Aurelian, 124, 125, 126, 137, 138, 141, 156, 171, 186, 187.
Bădulescu V., 14.
Baidaff Ig. B., 168.
Băjenică N., 56, 57.
Băjescu N., 62.
Balaban Gh., 14.
Balaban N., 14.
Bălășescu C., 157, 158, 171.
Balasz D., 14.
Băleanu Gh., 108.
Bănărescu M., 14.
Băncilă Mircea, 8, 9, 11. 24, 26, 28, 29, 40, 42, 45. 56, 57, 61, 77, 90, 137, 139.
Banciu I., 14.
Bărglăzan A., 123, 153.
Baron C., 14.
Bârs P., 157, 171.
Bartolomeu V.. 56.
Basarab C. Alex., 175, 191.
Beju Traian, 9, 27, 44, 45, 56, 57, 61, 73, 75, 76, 77, 87, 91, 92, 93, 124, 137, 153, 154, 172.
Beldie N. D-tru, 8, 9, 26, 28, 30, 42, 44, 45, 56, 57, 61, 71, 75, 76, 77, 87, 90, 91, 92, 108, 123, 124, 125, 126, 136, 138, 139, 141, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 169, 170, 171, 172.
Bercovici Emil, 104, 106, 123.
Bercovici Sigism., 169.
Berdan C., 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 26, 28, 40, 41, 42, 56, 57, 59, 104, 105, 106, 107, 109, 123, 124, 153, 154, 155.
Berardo Bernardis, 24, 27, 28, 41, 42, 74, 87, 108, 123, 124, 156, 170.
Beșchea N., 7, 8, 10, 11, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 42, 44, 45, 56, 59, 61, 74, 76, 77, 87, 90, 93, 103, 124, 125, 126, 137, 138, 139, 141, 154, 155, 156, 157, 158, 170, 171, 173, 174, 175, 186, 188, 189, 191.
Bey M. Gh., 11, 42, 109, 157, 171, 172, 173, 175, 184, 185, 187, 188, 189, 191.
Biernaschi C., 105, 123.
Birkenthal Alex., 124.
Bivolaru Nic., 29, 138.
Blaha N., 23, 122.
Blajean V., 14.
Blasko Beatrix, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 28, 40, 41, 42, 45, 59, 61, 76, 77, 89, 90, 91, 92, 93, 124, 125, 126, 136, 138, 139, 155, 169.
Blumenfeld D., 87, 104, 105, 123, 153, 154.
Boambău I., 61, 77, 137.
Bobârnac M., 105, 106, 123.
Bocancea I. Kirilă 10, 42.
Bogdan M., 105, 123.
Bogdan C. Mihail, 26.
Boghiu Iosif, 28, 42, 44, 59, 76, 77, 87, 90, 137, 138, 139, 155.
Boian C. Romulus, 137.
Boju Rosetel, 87, 154.
Boldur Simion, 61, 137.
Bolgiu O., 23, 39, 122, 168.
Bonea I., 104.
Borneanu G., 72.
Boroș P. Dan, 24, 42, 61, 93, 137, 138.
Boroș Petre 138.
Boroș I. Vasile, 61, 137.
Bossie V., 56.
Botea N., 7, 8, 9, 10, 11, 12, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 39, 40, 42, 45, 56, 57, 60, 61, 74, 75, 76, 77, 78, 86, 87, 89, 90, 91, 93, 104, 106, 108, 109, 124, 136, 142, 153, 154, 155, 169, 172, 173, 174, 175, 185, 186, 187, 188, 189, 191.
Botez Mihai, 14.
Botez St. Mihai, 11.
Botiș Virgil, 56.
Brădețeanu Cornel, 26, 56, 61, 92, 108, 124.
Braeșter Otto, 7, 9, 10, 11, 24, 27, 30, 40, 42, 44, 45, 56, 57, 73, 75, 77, 87, 90, 91, 92, 93, 109, 124, 136, 138, 154, 155, 157, 158, 172, 173, 174, 175, 186, 187, 188, 189, 191.
Bratu Gh., 14, 55, 184.
Breazu Dem., 14.
Brezeanu Paraschiv, 141, 157, 171, 188.
Brodschii I., 26.
Bruda Nic, 8, 10, 24, 26, 42, 56, 74, 124.

Brüll Leon 23, 42, 87, 108, 154.
Bruştuc Gh., 62, 93, 137.
Buda Cezar, 61, 77.
Budişteanu Alex., 6, 11, 57, 87.
Buga Ion 40.
Buicliu Gh. Col., 10, 14, 30, 58, 78, 84, 86, 91, 94, 102, 121, 126, 142, 158, 168, 174, 179, 184, 189, 190.
Burghele C., 14.
Bușilă Adrian, 104, 105.
Butoescu Tr., 31.

Caba V., 24.
Caftangioglu C., 28, 42, 44, 45, 91, 92, 125, 138.
Căldăraru Leon, 7, 8, 9, 10, 24, 27, 28, 42, 74, 87, 169.
Călin M. Gh., 11, 24, 26, 29, 42, 45, 56, 58, 75, 77, 91, 141, 155, 156, 157, 158, 171, 173, 174, 186.
Câlniceanu Gh. Gh., 10, 77, 93, 155, 171, 186.
Cândea C., 14.
Carabeţeanu Gh., 137, 171.
Carabeţeanu P., 61, 124, 141, 157.
Caracaş I. Gh., 10, 11, 26, 27, 28, 42, 44, 56, 61, 74, 77, 91, 124, 125, 137, 138, 139, 141, 156, 157, 170, 171.
Caracostea Andrei, 61, 137.
Caraman E., 14.
Cârdei V., 14.
Cercel C., 141, 157, 186, 188.
Cernes Mony, 10, 11, 27, 29, 42, 44, 77, 172, 173, 174, 175, 186, 187, 188, 189, 191.
Chelaru D-tru, 26, 56.
Chinie M., 8, 11, 26, 42, 61, 74.
Chirilă I., 43, 56, 62, 74, 75, 76, 77, 124, 137, 138, 155.
Chiser C. Marin, 28, 44, 188.
Chivulescu C., 14.
Ciffer S., 62, 137, 138, 157.
Ciocoiu Laurenţiu, 187.
Ciomofoiu Horia, 61, 137, 155, 156, 172, 174.
Ciorănescu I. C., 6, 27, 56, 57, 74, 87, 108, 153, 154.
Ciorănescu N., 3, 46, 104.
Ciuffu P., 124, 125, 156, 172.
Ciurceu V., 31.
Ciută Gavril 123.
Cizmărescu M., 14.
Cligher A., 56, 57, 73.
Cocorandu D., 8, 10, 28, 42, 56, 62, 137.
Cocorandu M., 104, 105, 106, 108, 123.
Cociubinschi V., 143.
Cogan Alter, 8, 26, 28, 56, 124, 137, 156, 157, 171.
Cojoc G., 7, 29, 61, 138.
Coman Aug., 14, 78, 102, 190.
Coman Onoriu, 26.
Comănescu Al. Bălteni, 10, 42, 74, 75, 109, 124.
Constantinescu V. Alex., 42.
Constantinescu D. D., 8, 40, 42, 56, 57, 74. 92, 138.
Constantinescu Gh., 13, 31, 35, 46, 62, 94, 110, 126, 140, 142, 158, 172, 174, 190.
Constantinescu Gh. Gh., 11, 42, 157, 171, 173, 186, 187, 189.
Constantinescu G. Ioan, 8, 87.
Constantinescu Gr. Ion, 56, 87.
Constantinescu Ioan, 105, 123.
Constantinescu C. Marius, 11, 24, 28, 29, 42, 61, 138.
Constantinescu Mihai, 56, 75, 77.
Constantinescu N. N., 87.
Constantinescu I. St., 29.
Constantinescu Venus, 87.
Constantinescu N. D-tru, 28.
Constantinidi Radu, 42, 56, 171,
Corneanu P., 14.
Corşoreanu Gh., 8, 9, 11, 12, 26, 28, 40, 41, 42, 44, 56, 57, 74, 77, 87, 90, 91, 92, 109, 154, 155.
Coşereanu Ion, 104, 105, 106, 107, 123, 153.
Cosma Z. Gh., 28, 42, 73, 124, 126, 158, 170.
Coşniţă Virgil, 7, 108, 126.
Costăchescu I., 11, 28, 87, 42.
Costea Oct., 8, 27, 28, 29, 42, 44, 45, 61, 76, 77, 91, 92, 137.
Crăciunescu I., 146, 147.
Cristea Aurel, 87, 154.
Cristescu I., 14.
Cristescu Ilie, 61, 124.
Cristescu C. Ioan, 11, 42, 61, 91, 137, 138, 156, 157, 171, 172, 173, 175, 189, 191.
Critz D. M., 7, 24, 27, 28, 40, 42, 57, 74, 87.
Cuncic Alfons, 61, 77, 124.
Curcubată Dionisie, 8, 11, 27, 28, 29, 30, 40, 42, 44, 45, 57, 59, 61, 77, 90, 124, 137, 138, 139, 155.

Dabija Ion, 143.
Damşescu Al., 8.
Dângă G. Vlad., 8, 9, 10, 11, 26, 27, 28, 30, 42, 44, 57, 61, 76, 77, 87, 89, 91, 92, 124, 137, 138, 139, 154, 172, 189.
Daraban N. Paul, 77, 125, 138, 170.
Dărmănescu I., 57, 76, 61, 74, 89, 137, 138, 140, 157, 158, 171, 173, 174, 175, 186, 187, 188, 189, 191.
Dăscălescu Hristache, 138, 141, 157, 171.
David Gh., 57, 87, 104, 109.
David I. I., 57, 87.
David Segal, 8.
Deoanca Nic., 125, 139, 143, 156, 170, 172, 173, 188.
Diaconescu Nic., 14,
Diaconescu V. Th., 8, 10, 11, 24, 25, 27, 28, 29, 42, 45, 56, 61, 75, 76, 77, 87, 92, 93, 124, 125, 126, 138, 139, 141, 154, 156, 158, 172.
Diaconu Gh., 10, 42.
Diaconu B. Marin, 7, 30, 40, 42, 57, 61, 74, 75, 93, 124, 137, 155.
Diaconu C. Oprea, 157.
Dimitrescu A. Mihail, 26.
Dimitriu Emil, 137, 138.
Dimitriu Al. Ioan, 186.
Dimitriu Paul, 7,
Dină N., 94, 137 138, 171.
Dinescu Florin, 11, 24, 29, 56, 61, 77, 124, 137, 156, 157, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 175, 186, 187, 188, 189, 191.
Dinu Gh., 57, 61, 124, 137.
Doboş V. Const., 137.
Dobrescu Băbici, 104, 105, 107.
Dogan C. Victor, 7, 29, 42, 61, 91, 93, 137, 155.
Doljan C. Ilie, 29.
Dordea A. Tr., 104, 105, 106, 123, 153.
Dorneanu S. V., 8, 9, 10, 11, 24, 27, 28, 30, 40, 44, 56, 57, 61, 74, 75, 76, 77, 87, 89, 91, 92, 93, 106, 109, 124, 138, 153, 154, 155, 169.
Dospinoiu N., 91, 104.
Dragalina Cornel, 14.
Drăgan Gh., 8, 11, 26, 28, 40, 42, 45 57, 61, 76, 77, 91, 137, 138, 139, 141, 157, 170, 171.
Drăghiceanu M., 59.
Drăghici Aurelian, 8, 24, 28, 42, 45, 57, 77, 87.
Dragomir N., 29.
Dragomirescu Buzne Ed., 123.
Dragomirescu N. Ioan, 104.
Drâmbă N. C., 90, 158.
Dravätz Ioan, 10, 11, 124, 125, 126, 137, 138, 155, 156, 157, 169, 170, 171, 172, 173.
Drogeanu N., 87, 109.
Drogeanu Paul, 61, 77, 92, 124, 125, 137, 138, 155.
Dumitrescu Alex., 27.
Dumitrescu E., 189.
Dumitrescu Cr., 14.
Dumitrescu Gh., 14.
Dumitrescu Haralamb, 61, 137.
Dumitrescu I. Gostavăţu, 186.
Dumitrescu Gh. Ioan, 42, 141, 157, 171,
Dumitrescu Gh. Marin, 104, 123,
Dumitrescu Mişu, 7, 8, 9, 11, 27, 28, 39, 42, 44, 57, 74, 75, 77, 87, 89, 109, 123, 138, 154.
Dumitrescu Natalia, 186.
Dumitrescu Stelian, 26, 27, 28, 40, 44, 57, 61, 124.
Dumitriu Mihai, 40, 42.
Dumitriu-Arad I., 11, 14, 110, 173.
Duport George, 77, 125, 138, 139, 156, 157, 171, 172, 174, 185, 186.
Duţulescu M., 14.

Ebner Artur, 7, 24, 42, 61, 91.
Eleomir. 8, 9, 11, 26, 42, 44, 57, 87.
Emilian Ion, 104.
Enulescu Ovid, 77, 87.
Epure T. St., 87, 153.
Ern S., 143.

Făcăoaru D. M., 24, 26, 75.
Faibovici I. H., 77, 139.
Fântâneanu I., 23.
Feinştein Herman, 61, 77, 137, 138.
Feldştein Solomon, 137, 156, 157, 171, 173, 175, 186, 187, 189. 191.
Fezi Gh. Gh., 8, 11, 28, 43, 61, 76, 92, 137, 143.

Filipescu Em. Gh., 39, 72.
Fischer M. Ion, 59, 75.
Flickstein I., 87, 105, 106, 123.
Florea C. Alex., 6, 7, 9, 30, 40, 44, 61, 74, 87, 89, 105, 123, 153, 154, 169.
Florea V. Gh., 28, 57, 61, 77, 90, 92, 124, 125, 126, 137, 138, 139, 141, 156, 157, 158, 170, 171, 186.
Florescu P. M., 14.
Florescu M. Oct., 8, 10, 11, 26, 28, 29, 30, 42, 43, 45, 57, 61, 73, 74, 77, 90, 92, 93, 138, 141 155, 157, 158.
Florescu Gh. Oprea, 74.
Foca I., 29, 61, 92, 137, 138, 139, 140, 156, 157, 158, 170, 171, 174.
Focşăneanu I. M., 104, 106, 123.
Fränkel Felix, 61, 137, 171, 173.
Franziller N., 8, 40.
Frăsineanu Maria 137, 138.
Frătici I., 8, 9, 10, 11, 26, 27, 28, 40, 43, 44, 56, 57, 74, 75, 77, 87, 90, 92, 106, 123, 124, 154, 169.
Frăţilă D. Oancea, 156.
Frumuşelu H. Gh., 8, 24, 25, 26, 28, 40, 43, 44, 45, 57, 61, 74, 75, 77, 90, 92, 124, 125, 137, 138, 139, 170, 171.

Gabrielescu C. V., 9, 12, 28, 43, 109, 153, 170, 190.
Gaiu Gh. Em., 184.
Gârleşteanu M., 7, 8, 12, 27, 28, 29, 43, 44, 57, 61, 74, 75, 77, 88, 93, 108, 124, 137, 138, 155, 169.
Gataiantu V. Barbu, 7, 12, 29, 42, 43, 44, 57, 59, 61, 76, 77, 87, 92, 93, 124, 126, 136, 138, 139, 141, 154, 156, 157, 158, 171.
Gavrilescu Ioan, 43, 57, 74, 75, 141, 156, 157, 169, 171, 186.
Georgescu P. Const., 105, 123.
Georgescu D., 14.
Georgescu Er. Fl., 103, 104, 105.
Georgescu C. Ioan, 106, 108, 123.
Georgescu Jean, 24, 26, 27, 43, 44, 46, 57, 75, 88, 109, 124, 125, 154.
Georgescu-Val. I. N., 7, 8, 9, 10, 12, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 42, 43, 44, 45, 57, 74, 75, 88, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 123, 153, 154.
Georgescu Răducan, 172.
Ghelber M., 8, 9, 12, 42, 44, 45, 74, 77, 88, 92, 109, 137, 154.
Gheorghiu C. Adrian, 43, 93, 124, 138, 155, 156, 171, 172, 175, 186, 189.
Gheorghiu Const., 157.
Gheorghiu C. Comăneşti, 108.
Gheorghiu E. Lucian, 105.
Gheorghiu Mircea, 77.
Gheorghiu Olimpia, 105,
Gheorghiu V., 27, 124.
Gherbanovschi N., 8, 9 12, 26, 27, 28, 30, 43, 44, 57, 61, 76, 77, 88, 89, 92, 137, 138, 139, 143, 172.
Ghermănescu M., 14, 55, 72, 132, 136, 181.
Ghinicescu I. Gh., 6, 24, 27, 28, 43, 56, 61, 76, 77, 88, 89, 92, 169.
Ghiţescu Virgil, 104, 105, 106, 123.
Giotta V., 105.
Giurgiu H. Gh., 43, 77, 88, 143.
Gogălniceanu M., 104.
Goilav Cristea, 104, 122.
Golcea C., 9, 40.
Goldenberg I., 105, 107.
Goldenzweig Leopold, 61, 77, 137, 138, 141, 157, 171.
Goldstein N., 10, 12, 26, 28, 30, 40, 43, 44, 57, 73, 109, 124, 169.
Gorciu G. V., 43.
Grabovschi Eug., 8, 9, 12, 27, 28, 30, 42, 44, 61, 77, 92, 104, 137, 154, 186, 189, 190.
Grabowschi W., 61, 137.
Gradini I. Gh., 8, 28, 40, 43, 44, 56, 74, 88, 139, 140, 154, 156, 158, 169, 170, 174.
Greavu I., 77.
Grigore T. Ion, 28, 43, 188.
Grigore Nic., 10, 24, 27, 29, 43, 61, 77, 109.
Grigore T. Virgil, 8, 9. 12, 26, 28, 30, 43, 45, 56, 57, 73, 77, 88, 90, 91, 92, 93, 143, 155.
Grigorescu L. Ion, 88, 108, 154.
Grigorescu Vintilă, 122.
Grofşorean Gh., 9, 27, 29, 43, 44, 56, 57, 74, 75, 88, 104, 105, 109, 123, 143, 153, 154, 156, 171, 173, 174.
Grozăvescu D., 12, 43, 157, 186.
Grozăvescu Petre, 12, 43, 157.
Grubenman I., 12, 24, 26, 29, 40, 42, 43, 57, 61, 74, 75, 77, 90, 92, 109, 124, 126, 137, 138, 140, 154, 171.
Grümberg Herman, 105.
Grümberg M. 186.
Grümberg Vigder, 186.
Grünbaum M., 55, 62, 122, 184.
Gudju Hercule 175, 191.
Guriţă Gh., 137, 128.

Hacig Ion, 77, 187.
Halchias Gh., 93, 137, 138.
Haimovici G. S., 105.
Handjieff Velislav, 44, 77, 92, 124, 155, 156, 158, 170, 172, 173.
Haralambie V., 156.
Hart L., 57, 141.
Halchiovschi Gh., 157, 171.
Herscovici Em., 88, 104, 107, 109, 123,
Hotăran D. Gh., 9, 10, 28, 40, 43, 57.
Hristea Horaţiu. 31.
Hristea Ionel, 88.
Hubert M., 14.
Hulubei Telemac, 62, 93, 124, 137, 138.

Iacob St. Eugen, 8, 10, 12, 24, 26, 27, 28, 29, 42, 43, 45, 56, 57, 61, 74, 75, 77, 88, 92, 93, 137, 138, 140, 141, 154, 156, 158, 171, 172, 185,
Iancu H. David, 186.
Ianculescu Oct., 8, 9, 12, 26, 43, 44, 57, 61, 76, 77, 88, 140, 170.
Ianovici Adrian, 62, 138, 141.
Ieremia P., 12, 28, 43, 57, 61, 90, 126, 156, 158, 170, 172, 173.
Iliescu Const., 92.
Iliescu Dan, 7.
Iliescu St. Dima, 25, 29, 30, 44, 45, 57, 88, 108, 109.
Iliescu E., 123.
Iliescu I. Ion, 106.
Iliescu Marin, 24.
Iliescu Mircea, 30, 57, 61, 62, 75, 93, 104, 124.
Iliescu Th. Th., 108.
Iliescu St. Virgil, 26, 42, 43, 61, 75, 77, 92, 137, 138.
Iliovici G. Const. 93, 137, 138, 155, 156, 171, 172.
Iliuţă I. I., 30, 62, 92, 93, 137, 138.
Iliuţă I. Dăbuleni, 92, 94, 137, 138, 140, 157, 170.
Ioachim Grig., 8, 12, 24, 28, 43, 44, 45, 61, 74, 76, 77, 90, 92, 124, 137, 138, 139.
Ioachimescu A., 4.
Ionescu N. Alex., 24.
Ionescu Angelo, 8, 9, 12, 24, 27, 28, 40, 43, 44, 45, 57, 72, 74, 76, 77, 86, 88, 90, 92, 124, 125, 138, 139, 143, 154.
Ionescu Anton, 29, 56, 74.
Ionescu D. Alex., 140, 141, 156, 157, 171, 186.
Ionescu T. Carol, 104, 105.
Ionescu Gh. C-tin, 8, 24, 26, 28, 42.
Ionescu N. C-tin, 104.
Ionescu K. C., 14.
Ionescu V. D-tru, 24, 74.
Ionescu I., 122.
Ionescu Haralamb 186.
Ionescu M. Ion, 124, 137.
Ionescu Jean, 29.
Ionescu Iuliu, 124, 138, 141, 171, 186.
Ionescu M. Lazăr, 7.
Ionescu C. Niculae, 26, 28, 43, 57, 59, 61, 77, 92, 137, 157, 169, 171, 186, 188.
Ionescu I. Nicu, 74, 88.
Ionescu I. Paul, 26, 57, 75, 88, 108, 153, 154.
Ionescu Gabriel Radu, 137, 171.
Ionescu A. Ştefan, 12, 28, 109.
Ionescu Gh. Stelian, 12, 28, 29, 43, 170, 171, 173, 186.
Ionescu-Brezuică I., 104, 105, 107, 157, 141.
Ionescu-Bujor Th. Andrei, 7, 9, 10, 12, 13, 24, 29, 40, 42, 43, 57, 61, 74, 75, 77, 78, 90, 92, 93, 109, 124, 125, 126, 137, 138, 140, 154, 155, 156, 157, 158, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 184, 186, 187, 189, 191.
Ionescu-Bujor Th. Const., 7, 8, 9, 10, 12, 24, 26, 27, 29, 30, 40, 42, 43, 45, 57, 61, 74, 75, 76, 77, 78, 90, 92, 93. 108, 109, 124, 126, 138, 140, 141, 142, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 170, 171, 173, 174, 175, 184, 186, 187, 188, 189, 191.
Ionică Ion., 56, 74.
Ioniţă M. Ion Locot., 9, 10, 12, 13, 24, 29, 30, 44, 77, 105, 123.
Iordache I. I., 123.
Irhaşiu V., 143.
Isăcescu Const., 140, 171.

Iscovici Paul, 8, 10, 12, 27, 29, 43, 44, 56, 61, 73, 74, 76, 77, 88, 92, 93, 137, 138, 139, 157, 158, 172, 173, 174, 175, 186, 187, 188, 189, 191.
Istimie I. Const., 42, 43, 56, 57, 61, 75, 93, 137, 138, 155, 157, 171, 186, 187.
Ivănescu I. Ion, 28.
Ivanovici A. Nic., 61, 137, 138, 157.

Jacquier H., 24, 40.
Jecu M. Ion, 14.
Jicman I. Nic., 43.
Jojea Nic., 9, 24, 28, 88, 108, 124.
Junghans R Gh., 12. 42, 43.

Katz Lazăr, 8, 10, 12, 24, 42, 43, 57, 58, 59, 61, 75, 77, 93, 124, 125, 137, 138, 141, 155, 156, 157, 171, 186.
Katz Pincu, 40, 104, 106, 107, 109, 123, 153.
Kertesz Paul, 7, 12, 24, 28, 30, 42, 44, 45, 46, 61, 92, 93, 137, 138, 139, 141, 156.
Klein S. 105, 107, 123.

Lalescu Tr., 14, 142, 163, 167, 179, 189.
Lateș Vasile 24, 74, 124.
Latiu V., 24.
Lăzărescu I. Ion, 61, 93, 106, 123, 137, 138, 156, 171.
Lăzărescu Fl. St., 104, 106, 123.
Lăzărescu M. V., 74, 88, 109.
Leonida D., 31.
Lepădatu I. Miclea, 61, 77, 92, 94, 125, 138, 156, 157, 158, 170, 171, 174.
Lepădatu I. V., 6, 7, 9, 24, 27, 28, 30, 43, 44, 56, 61, 74, 76, 77, 88, 89, 91, 105, 138, 139, 153, 154, 156, 170.
Lindenberg Lionel, 76, 124, 156.
Linteș I. Cpt., 14, 46, 72, 132, 153.
Lipcan A., 157, 158.
Liteanu Gh Col., 14.
Liuba Gh., 88.
Liubenco D. S., 88
Lupan Andrei, 14.
Lupan Avram, 141.
Lupan Em., 88.
Lupan V., 122.
Lupescu V. Eug. 175, 191.
Lupșe Emil, 88.

Macri I. Ștefan, 61, 137, 138.
Magheru I., 31, 47.
Manafu Val., 8, 9, 10, 12, 27, 28, 40, 42, 43, 44, 57, 88, 124.
Manoil Adolf, 7, 9, 12, 26, 28, 42, 43, 44, 56, 74, 75, 77, 88, 92, 109, 154, 156, 157, 158, 171, 174, 175, 191.
Manoil Eug. Maior, 28, 43, 44, 155, 187, 188.
Manole Gh., 28, 45, 61, 77, 92, 137.
Manicatide Al., 169.
Manolescu N., 189,
Manolescu I. Nic., 88, 92, 93, 125, 126, 137, 138, 139, 141, 154, 155, 157, 158, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 185.
Manughevici C., 14.
Marcopol Apostol, 61, 137, 138.
Marcovici H., 7, 8, 10, 12, 24, 27, 40, 43, 44, 57, 74, 76, 88, 90, 92, 109, 154, 157, 169, 170.
Marcovici Mauriciu, 7, 8, 10, 12, 24, 42, 75, 137, 157, 171.
Marcu A., 189.
Marcus Max, 29.
Mardan D., 14.
Mareș A., 155.
Mareș Cornel, 106, 107.
Mareș Grig., 12, 27, 28, 29, 30, 43, 44, 45, 76, 77, 91, 92. 170.
Mareș P., 125, 156.
Mareș T., 84.
Manu Gh., 184.
Mărienuț Uroș, 143.
Marini Paul, 8, 10, 24, 26, 28, 42, 43, 57. 109.
Marineanu Tr., 61, 77, 137, 138, 140, 141, 157, 188, 189.
Marinescu S. D., 56, 61, 76, 77, 92, 93, 109, 137, 138, 139, 140.
Marinescu I. I., 27, 88, 153, 154.
Marinescu Tr., 88.
Mariș Marius, 12, 24, 26, 30, 42, 44, 45, 57, 61, 77, 92, 125, 137, 138, 140, 141, 155, 156, 157, 158, 170, 173, 174, 175, 186, 189, 191.
Măru D-tru, 104, 106, 107, 123,
Matak Radu, 61, 125, 137, 187.
Mătăsaru C-tin, 24, 29.
Mătăsaru D., 24.
Mateescu Gr., 106, 107.
Mateescu N., 56.
Măxinoiu Tr., 103.
Mehlman Th., 105, 123.
Micula Ovid, 125, 137, 156.
Miclescu Andrei 104, 105, 107, 123.
Mihăescu D. Const., 106, 123.
Mihailescu A. C-tin. 8, 9, 10, 12, 27, 28, 30, 44, 57, 89, 104, 124, 169.
Mihailescu C. Grig., 57.
Mihailescu P. Marin. 43.
Mihailescu St. Nic., 8, 9, 10, 12, 29, 42, 44, 57, 88, 92, 125, 138, 141. 156, 170,
Mihailescu Romeo, 24, 25, 57, 74, 75, 88, 109, 153, 154.
Mihailescu Tase, 12, 26, 28, 43, 44, 61, 77, 88.
Mihailescu Joldea Em., 30.
Mihaly El., 14.
Milculescu D., 29, 74.
Milner I., 8, 25, 26, 28, 29, 43, 56, 58, 73, 75, 109, 124.
Minea I. Titus, 12,
Mitescu Dem. Remdecht, 109.
Mitzel A., 77, 125, 138.
Mitran Gh., 88, 154
Miu M. Ion, 8, 10. 12, 24, 26, 27, 28, 29, 42, 43, 57, 74, 75, 88, 90, 92, 109, 124.
Moașa D-tru, 12, 24, 28, 29, 169.
Moașa V., 12, 24, 28, 171.
Mogoșan C., 189.
Moisil Gh., 55.
Moldovan Gaston, 143.
Moldoveanu Marin, 61, 77, 137.
Morărescu Aurel, 12, 26, 40, 43.
Moroianu I. Al., 137, 141, 171.
Moroianu Ath., 108, 110, 157.
Moroianu Oct., 88.
Mortun Emil, 61, 77, 156, 158, 170, 172, 186.
Motaș C., 61, 73, 75, 77, 155.
Motculescu St., 61, 141.
Moți V., 61, 137, 138.
Munteanu I. Gh., 29, 45, 61, 92, 93, 137, 138, 155, 156, 157, 170, 171, 172, 174, 186, 189.
Mușta St., 8, 9, 28, 30, 40, 43, 104, 108, 123.

Nan Victor, 10, 12, 40.
Nanov O. Chiru, 93, 137, 138.
Neacșu Gh. Gh., 7, 40, 42, 58, 75.
Neacșu V., 12, 43, 45, 61, 77, 88, 137, 138, 141, 154, 157, 171.
Nedelceanu Emil, 157, 172, 175, 186, 187, 191.
Nedelcu Ilie, 75, 77, 124.
Nedelescu D., 12, 42.
Negrețu I. Fl., 104, 105, 106, 107, 108, 109, 123.
Negreu P. I., 189.
Nestor Gh. Dum., 12, 24, 42, 43, 90, 93, 124, 125, 138, 140, 151, 155, 171, 172, 173, 175, 184, 186, 187, 188, 189, 190.
Neumann Maria, 7, 8, 9, 10, 12, 27, 28, 40, 42, 43, 59, 77, 88. 90, 91, 92, 125, 138, 169, 170, 171.
Nichifor Gh., 14, 122.
Nicolau Alex., 31.
Nicolau A., 105, 142.
Nicolau C., 126, 138, 156, 157, 158, 172, 174.
Nicolau I. C., 171, 186.
Nicolau Gh. C., 8, 9, 10, 12, 27, 28, 42, 43, 44, 45, 56, 61, 74, 75, 77, 88, 90, 91, 92, 110, 125, 138, 139, 154, 169, 170, 171.
Nicolau C. H., 86, 103.
Nicolau M. Iulian, 106, 123.
Nicolau C. Ion, 29, 61, 93, 125, 137, 138, 141, 157, 158, 175, 186, 187, 189, 191.
Nicolau Pomp., 31.
Nicolescu I. Emil, 125, 126, 140, 141, 155, 156, 170, 185, 186.
Nicolescu V. Gh., 157, 158, 172, 173.
Niculescu Alex., 43, 57, 107.
Niculescu Emanoil 12, 45, 61, 93, 125, 138, 141, 143, 157, 172, 173, 174, 175, 186, 187, 189, 191.
Niculescu St. Em., 189.
Niculescu Isaia, 107.
Niculescu Valeriu, 104.
Niculescu-S. Victor, 43.
Nițescu Paula, 186.
Noaghea Gh., 14.
Noica I., 43, 61, 138.
Novacu A. C. Val., 12, 24, 29, 30, 44, 57, 61, 62, 77, 90, 92, 124, 125, 126, 137, 138, 140, 141, 155, 156, 157, 158, 170, 171, 173, 174, 175, 186, 188, 189, 191.

Oana I., 10, 12, 43, 61, 137.
Obreja Iancu, 88.
Olaru Th. Enea, 9, 12, 26, 28, 43, 44, 45, 57, 58, 77, 87, 92, 137.
Onicescu O., 14.
Oniţiu Fl., 108.
Oprişean Ernest, 123.
Oprişan Gh. Victor, 168.
Orăşanu C. D., 6, 14, 55.
Orăşeanu Gr., 14, 169.
Orbonaş Iuliu, 143.
Otopeanu C., 31.

Pamula Alex., 24, 27, 104, 109, 110, 124, 157.
Panait Ion, 105.
Panaitescu I. Alex., 108.
Pantu Z. I., 61, 137, 138, 141, 156, 157, 171, 185, 186, 187, 189.
Papadopol C. Calimah, 12, 28.
Pârâianu Nicu, 104, 105, 106, 107, 123.
Paraschivescu Bosnief, 57, 61, 125, 138.
Partenie Iancu, 24.
Pârvu A., 29, 61, 138, 186.
Pascariu A., 189.
Pasco Wilhelm, 9, 44, 74, 77, 89, 155, 169.
Pascu D., 88.
Păslaru I. N., 124, 125, 126, 138, 156, 170, 171, 173.
Patriciu V. Aurel, 29.
Pătroianu I. Mihai, 57, 88, 104, 108, 153, 154.
Patron Nic., 77, 93, 137, 138, 156, 171.
Păun I. Const., 138, 157, 171.
Păunescu G. Petre, 42, 43.
Păunescu Trifon, 12.
Pavelescu Th. Mircea, 138.
Pelin I. I., 12, 74, 156.
Percea Viorel, 75, 88, 104, 108, 124.
Petrescu A., 14.
Petrescu St. Al. Dan, 8, 24, 29, 40, 42, 43, 56, 58, 75, 91, 137, 138, 141, 171.
Petrescu M. Ioan, 12, 44, 92, 110, 125.
Petricoane D. M., 15.
Placă M., 24, 27, 28, 29, 43, 45. 57, 61, 74, 77, 88, 92, 137, 138, 154.
Pinchis M., 107.
Piperiu A. Nicuşor, 9, 10, 43, 57, 58.
Podariu Alex., 61, 76, 77, 90, 92, 93, 124, 125, 137, 138, 139, 140, 141, 156, 170, 171, 174, 175, 186, 187, 188, 189, 191.
Podeanu Alex., 126.
Podeanu Aurel, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 24, 27, 28, 40, 41, 42, 43, 49, 59, 74, 75, 88, 110.
Polaczek Fr., 8, 10, 12, 24, 25, 26, 28, 43, 57, 61, 74, 77, 92, 110. 137.
Pop Alex., 10, 12, 14, 28, 40, 43, 45, 58, 88, 90, 92, 104, 105, 154.
Pop I. Emilian, 108, 154.
Pop Iulian, 8, 9, 11, 12, 24, 26, 27, 28, 29, 40, 43, 44, 45, 57, 59, 61, 74, 76, 90, 91, 92, 124, 125, 126, 137, 139, 143, 156, 170, 171, 172, 185, 186, 187, 189.
Popa V. Adrian, 61, 137.
Popa Ilie, 8, 9, 10, 27, 40, 43, 57, 58.
Popa Iulian, 12, 24, 26, 61, 77, 137, 173.
Popa Octavian, 8, 57.
Popa Petrescu Nic., 8, 12, 27, 28, 43, 45, 57, 61, 74, 77, 92, 124, 138,
Popea Gh. Alex., 104.
Popeanu A., 105, 106, 107, 123.
Popeea Ovid, 39, 123, 153.
Popeanu Virgil, 42.
Popescu Adela, 186.
Popescu I. Alex.,(M-rea Dealului), 29, 43, 88, 61, 93, 138.
Popescu I. Alex. (Giurgiu), 44, 75, 77, 88, 138.
Popescu Th. Alex., 27.
Popescu N. Cornel, 7, 8, 9, 10, 24, 42, 59, 75, 104, 110, 125. 126, 138, 139, 141, 156, 171, 175, 186, 189, 191.
Popescu Emilian, 88.
Popeseu Epaminonda, 26, 28, 88, 125.
Popescu Grigore, 109,
Popescu Ion, 105.
Popescu Dem. Marin, 43, 88, 154.
Popescu Nicu, 28, 30, 89, 90, 169.
Popescu N. N., 56, 74, 88, 104, 106.
Popescu Spirea 42, 43.
Popescu Stelian 61, 77, 125, 138, 141, 157, 171, 172, 175, 186, 188, 189, 191.
Popescu Th., 12, 44, 88.
Popescu Virgil, 141, 157, 186, 187, 188.
Popluca M., 189.
Poponete N. Const., 125.
Popovici Aurel, 9, 10, 12, 27, 28, 41, 44, 45, 46, 58, 61, 74, 75, 77, 91, 92, 93, 110, 125, 126, 138, 139, 141, 155, 156 157, 158, 170, 171, 172, 173, 174.
Popovici C. C., 6, 7, 8, 9, 10, 24, 27, 28, 29, 40, 43, 45, 56, 88, 89, 107, 108, 110, 123, 124, 153, 154, 169.
Popovici Dili, 171.
Popovici Dedu, 188.
Popovici Gh., 186.
Popovici Cr. Ion, 105.
Popovici Th. Ion 7, 8, 9, 10, 11, 12, 26, 28, 40, 42, 43, 57, 58, 59, 74, 75, 88, 104, 105, 106, 107, 108, 110, 123, 124, 125, 126, 139, 141, 142, 153, 154, 155, 156, 157, 169, 170, 171, 172.
Popovici Mihai, 27, 40, 42, 57, 58, 137.
Popovici Th. Teodor, 43, 157, 172, 173, 187, 189.
Popovici Tib., 6, 19, 55, 71, 72, 90, 99, 105, 106, 107, 123, 184.
Popovici Puiu Dan, 44, 61, 76, 77, 88, 90, 92, 104, 137, 138, 155.
Popper Erwin, 10, 28, 43, 173.
Potârniak Octav, 138.
Potopeanu C. 188.
Predescu Nic., 12, 24, 29, 42. 43, 56, 77, 138.
Prejbeanu Iulian, 77.
Propst Jean, 108, 123.
Protopopescu I., 10, 15, 46, 57, 142, 189.
Puşcariu Ilie, 14.
Purdilă Const., 7, 8, 12, 24, 25, 28, 42, 43, 45, 57, 61, 74, 75, 77, 92, 93, 110, 124, 138, 140, 171.
Puşcă Poma, 8, 10, 24, 28, 43, 44, 57, 58, 61, 77, 92, 138, 139

Rădulescu C. Mihail, 28, 43, 44, 45, 61, 76, 77, 92, 125, 126, 138, 139, 156, 157, 158, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 186, 187, 188.
Rădulescu P. Marius, 104, 109, 141.
Rădulescu Nic., 8, 12, 42, 43, 56, 77, 92, 138.
Rădulet Remus, 105, 106, 107, 135.
Raiciu V. Const., 125, 138, 141, 157, 171, 186.
Raian-Preajba Const., 138.
Ralescu Maria, 110.
Râmniceanu L. Radu, 8, 10, 12, 28, 30, 40, 43, 44, 56, 58, 74, 88, 90, 91, 154,
Rapaport N. A., 61, 75, 90, 92, 110, 138.
Râpeanu Radu, 157.
Râpeanu Virgil, 8, 9, 10, 12, 24, 27, 28, 29, 43, 44, 45, 57, 58, 61, 76, 77, 91, 92, 93, 110, 125, 126, 138, 139, 141, 155, 156, 170, 171, 175, 186, 188, 189, 191.
Rătan S.. 8, 12, 26, 28, 40, 43, 44, 45, 57, 77, 88, 90, 138, 155.
Rauch S., 57.
Rauchbach Artur, 26, 27, 57, 74, 88, 110.
Răut C., 104, 143, 168, 179.
Râsnoveanu Emil, 24, 58, 61, 62, 74, 77, 138, 155.
Rigani G. 104, 106, 107, 123.
Ristea Marin, 123.
Riven M., 42.
Rizescu I. T., 132.
Roibănescu C., 14.
Roman I. I., 57, 138, 171.
Romaşcan St., 157, 171.
Roşu Al., 7, 8, 10, 27, 40, 42, 43, 57, 58, 59, 75, 84, 88, 116, 124.
Rotaru Barbu, 29.
Rubinstein Martin, 104.
Rucăreanu Nic., 8, 12, 27, 28, 40, 43, 44, 46, 58, 61, 77, 90, 92, 138, 155. 173.
Rusanda Gh., 12, 43, 44, 61, 77, 92, 125, 126, 138, 139, 140, 143, 156, 158, 170, 171.
Rusmănică Ion, 138.
Rusu C. Adrian, 8, 10, 27, 43, 57, 58.
Rusu Aurel, 28.
Rusu Liviu, 42, 43.

Saegiu E., 15.
Samoilă D-tru, 88, 106, 123, 154, 171.
Săndulescu I. Ion, 61, 93, 125, 138.
Sarian M., 106.
Satcoeanu Gh., 137.
Scărlătescu D., 91.
Schächter L. A., 23, 56, 110.
Schächter M. Ozias, 24, 90, 92, 110, 125, 138, 141, 156, 157, 171, 172.
Schileru Dili, 105, 123, 190.
Schmautz Al. Gh., 26, 43, 74, 154.
Schönfeld H. Conrad, 123.
Schor A. Oscar, 138, 171.
Schutz Pavel, 61, 77.
Schwartz Al. Gh., 88.
Scodreanu Alex., 105, 106, 123.

Scoruşianu I. Eug., 106, 123.
Scripcă Laur, 9, 12, 27, 28, 40, 43, 44, 57, 58, 77, 88, 90, 91, 93, 105, 123, 124, 125, 138, 139, 187, 188, 189.
Scripcă Valentin, 29, 44, 75, 77, 138.
Segal I. Leon, 93, 94, 125, 137, 139, 141, 157, 158, 172, 173, 174, 175, 186, 188.
Segărceanu D. C-tin. 8, 28, 58, 169, 171, 174.
Segărceanu C. Nic., 40, 58, 103, 169.
Septelici Raul, 104, 123.
Şerban Tiberiu, 7, 8, 9, 10, 12, 24, 26, 28, 40, 42, 43, 57, 58, 74, 75, 88, 124.
Şerbănescu D-tru, 31.
Şerbănescu Ovid, 88.
Şerban Aurel, 12, 29, 46, 57, 61, 77, 92, 125, 138, 141.
Sergescu P., 15, 24, 39, 55, 122, 136, 184.
Serghiev Ion, 28, 57, 88.
Severin C. Marcel, 24, 61, 77, 93, 138, 140.
Severineanu C., 15.
Sfinţescu T. Duiliu, 61, 138, 157.
Silaghi V. Ionel, 108.
Silion G. Ion, 6, 56, 74, 88, 104, 105, 106, 107, 108, 123, 153, 154.
Silistrarianu C., 24, 40, 43, 57, 58, 93, 125, 138, 139, 156.
Simionescu D. Gh., 6, 24, 26, 27, 55, 57, 58, 74, 75, 88, 108, 110, 153, 155.
Simionov Kindin, 125, 140, 156, 170, 172, 173, 186.
Simniceanu Sava, 15.
Sobel Mircea, 42, 43, 172, 175, 186 187, 188, 191.
Socaciu Nicu, 29, 42, 93, 124, 125, 138, 140, 143.
Solomon N., 104, 123.
Solomon W., 55, 104. 123.
Spacu G. Petre, 8, 9, 12, 26, 27, 28, 40 43, 44, 45, 46, 57, 59, 72, 77, 86, 88, 90, 91, 92, 125, 139, 143, 154, 156, 170, 185, 186, 187, 189.
Spineanu Cezar, 15.
Spârchez Zeno, 7, 8, 9, 10, 12, 26, 28, 29, 40, 41, 43, 44, 57, 58, 74, 75, 77, 88, 124, 125, 139, 140.
Stamatescu I. Val., 57, 58, 74, 88, 104, 108, 154.
Stănescu-Teodoru D., 7, 8, 40, 42, 43, 61, 124, 138.
Stamatiu A. M., 8, 10, 12, 28, 43, 44, 105, 106, 107, 109, 123, 153.
Staicu Irimie, 8, 9, 12, 28, 29, 43, 44, 57, 74, 88, 124.
Stăncescu A., 139.
Stăncescu C., 15.
Stănciulescu Dan, 40, 43, 58, 61, 72, 77, 93, 125, 138, 140, 171.
Stănciulescu A. Gh., 8, 9, 56.
Stănculescu I. C-tin, 88.
Stănescu I. Aurel, 7, 42, 43, 58, 61, 138.
Stănescu A. D-tru, 106.
Stănescu A. Nic., 87, 109.
Stefănescu Emil, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 23, 28, 40, 42, 43, 55, 56, 59, 62, 67, 72, 74, 78, 88, 92, 104, 105. 106, 107, 108, 110, 120, 252, 153, 254, 158, 169, 172, 189.
Stelian D-tru, 77.
Stern B. Artur, 24, 28, 43, 61, 125, 139, 156.
Steriopol D. Ştefan, 29, 139.
Stoenescu Alex., 104, 106, 107, 123, 131.
Stoenescu I., 106, 122.
Stoian I., 7, 29, 43, 57, 61, 92, 124.
Stoica Alex., 122.
Stoica N. Aurel, 7, 8, 10, 11, 12, 24, 26, 28, 29, 30, 42, 43, 45, 46, 61, 74, 75, 76, 77, 88, 92, 110, 126, 137, 139, 141, 155, 157, 158, 171, 172, 173, 174, 175, 186, 187, 188, 189, 191.
Stoica S. D-tru, 42, 44, 46, 61, 77, 90, 92, 143, 155, 156, 169, 172.
Stoicescu M., 15.
Stoicescu Th., 24, 42, 57, 61, 93, 94, 110, 125, 138, 139, 141, 157, 171, 186.
Stoicoiu M. Tr., 12.
Stroescu I. Gh., 7, 8, 9, 10, 11, 12, 28, 40, 43, 61, 77, 88, 92, 108, 154.
Sudan C., 39.
Surugiu Vasile, 62, 75, 93, 138, 139, 171.
Suşelescu N. Ion, 88, 154.

Tailer Gh., 184.
Tănăsescu V., 143.
Tanitchi Vlad., 153.
Tărăbuţă C. Paul, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 24, 26, 27. 28, 40, 42, 43, 57, 58, 59, 74, 75, 88, 104, 105, 106, 107, 108, 110, 123, 153, 155, 169.
Tăraş V., 7, 8, 9, 10, 12, 17, 26, 27, 28, 29, 30, 40, 42, 43, 44, 46, 56, 58, 61, 62, 74, 75, 76, 77, 88, 90, 91, 92, 94, 108, 110, 124, 125, 126, 137, 139, 140, 141, 153, 154, 156, 157, 158, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 185, 186, 187, 188, 189, 191.
Tătulea Val., 61.
Tauber A., 12, 104, 105, 107, 109, 123, 153.
Teodorescu C., 2, 15, 18, 31, 34, 50, 63, 66, 79, 82, 95, 98, 102, 111, 114, 126, 127, 130, 142, 143, 146, 159, 162, 178, 188, 189.
Teodorescu C. C., 26, 29, 77, 91, 139, 155, 171.
Teodorescu M. D-tru, 56, 58, 74, 109, 110.
Teodorescu N., 7, 8, 9, 10, 12, 13, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 40, 42, 43, 44, 46, 57, 58, 59, 71, 74, 75, 77, 88, 90, 91, 92, 93, 108, 110, 125, 126, 136, 140, 141, 153, 155, 156, 157, 158, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 185, 186, 187, 188, 189, 191.
Teodoru Mircea, 24, 28.
Teodosiu Avram, 15.
Thierrin Gh., 15.
Toescu D. L., 155.
Tomescu Gh., 88.
Toporescu E., 15.
Trofinov P., 46, 94, 155.
Trincă D. Marin, 107.
Tuducescu A. N., 105.
Tudose C. Tănase, 61, 125, 139, 157, 171.
Tunaru Traian, 8, 10, 12, 28, 46, 62, 73, 77. 88, 92, 126, 141, 155, 156, 158, 169, 170, 172.

Ţanovici C., 12, 24, 26, 28, 42, 43. 44, 46, 56, 57, 61, 62, 75. 77, 90, 92, 94, 110, 125, 126. 138, 139, 140, 141, 143, 155, 156, 157, 158. 169, 170, 171, 172, 174, 185, 186, 187, 188, 189.
Ţânţăreanu P., 74.
Ţari N. Gh., 125, 138, 139, 157, 171, 186, 187, 189.
Ţepeneag E., 15.
Ţigoi Z. Ion, 12, 29, 30, 46, 62, 92, 125, 156.
Ţino O., 15.
Ţiriac St., 105.
Ţiţeica Gh., 55, 122, 188.

Udrisky Tr., 153.
Ullea C. Titel, 8, 9, 12, 24, 26, 27, 40 43, 44, 46, 57, 58, 61, 62, 76. 77, 92 125, 139, 155, 170, 188, 189.
Ungureanu Gh., 138, 139, 157. 171.
Urzică Aurel, 107.
Urzică P., 62.

Văcăreanu E., 8, 24. 43, 62, 77, 125.
Vaida M. M., 24, 29.
Vâlcovici V., 13. 15, 30, 39, 46, 47, 59, 61, 62, 78, 83, 88, 94, 102, 158. 169, 185.
Vasilescu C. Alex., 92, 125, 156.
Vasilescu Bartolomeu, 9, 12, 27, 28, 29, 43, 44, 61, 62, 74, 75, 77, 88, 90, 92, 94, 124, 125, 126, 138, 139, 140, 141, 155, 157, 158, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 185, 186, 187, 188, 189, 191.
Vasilescu I. D., 106.
Vasilescu A. Mircea, 105, 108.
Vasilescu Virgil, 104, 106, 123.
Vasiliev Ilie, 46, 62, 94, 138, 139, 140, 156, 171, 186.
Vasiliu Gh., 15.
Vasiliu Gh. Gh., 26, 28, 29, 42, 43, 44, 45, 46, 57, 61, 62, 74, 75, 77, 88, 92, 93, 124, 125, 137, 139, 140, 156, 170, 174, 175, 186, 187, 188.
Vasiliu D. George, 141.
Vasiliu Mihai 15, 78, 94, 141.
Vasiliu Gh. Nic., 8, 42, 90.
Vasiliu N. St., 9, 24, 26, 40, 43, 57, 74.
Vasiliu C. Ion, 23, 56, 74, 88, 103, 107, 109, 110, 123, 153, 155.
Vatăşan Ovid, 88, 108.
Vellea Gr. M., 8, 12, 24, 27, 28, 29, 30, 40, 42, 43, 44, 46, 56, 57, 58, 62, 74, 77, 90, 91, 92, 138.
Vior D., 143.
Vlad Oct., 62.
Vlad I. V., 15.
Vlădea I., 8, 9, 10, 12, 27, 28, 29, 30, 40, 41, 42, 43, 44, 57, 58, 59, 61, 62

74, 75, 77, 90, 91, 92, 93, 94, 124, 125, 126, 129, 140, 141, 156, 158, 169, 171, 172, 173, 174, 175, 185, 186, 187, 188, 189, 191.
Vlădeanu Tib., 7.
Vlaţiu L., 8.
Voiculescu Şt., 27, 58.
Voinescu I., 12, 29, 43, 62, 94, 124, 138, 139, 141.
Vulpanovici Boris, 8, 9, 10, 28, 30, 44, 62, 74, 75, 77, 94, 110, 125, 126, 137, 138, 139, 140, 141, 156, 170.
Vutcăräu A., 143.

Wagner W., 57.
Wallechner Emil, 40, 57, 58, 74, 139.
Weiss Leon, 86, 105, 123.
Weiss Solomon, 88, 104, 167, 153.
Wetter Ana, 24, 26, 29, 62, 77, 88, 92, 138.
Winkler A. Alfred, 125, 126, 139, 141, 156, 170, 171, 174, 175, 185, 186, 188, 189.
Witzmann Marcu, 105, 107.

Zaider Moise, 105.
Zaidman Iosif, 184.
Zamfir D. Ilie, 171.
Zamfirescu Alex., 74, 88, 125, 156.
Zamfirescu Gh., 155, 157, 171.
Zamfirescu Ion, 10, 12, 28, 42, 43, 62, 74, 94, 138, 139, 140, 141, 157, 171, 172, 173, 186, 189.
Zapan Gr. 15, 72, 103.
Zarda Ion, 10, 12, 24, 28, 43, 57.

BIBLIOTECA „ASTRA"
SIBIU

INSTITUT DE ARTE GRAFICE
CARTEA ROMÂNEASCĂ
TIMISOARA.

5 lei